# الرياضيات

- مقاييس النزعة المركزية
- المعاينة وتوزيعات المعاينة
  - وقاييس التشتت
    - الزمر
  - التكاول غير الوحدد

مبة نصر قعدان





www.darsafa.net

# بِسْسُسِلِللَّهِ ٱللَّهِ اللَّهُ عَلَكُو وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونُ وَسَتُرَدُّونَ ﴿ وَقُلِ اعْمَلُواْ فَسَيَرَى اللَّهُ عَلَكُو وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ أَوْسَكُرُدُمُ مَا كُذْتُمُ تَعْمَلُونَ ﴾ إِنَّى عَلِمِ ٱلْفَيْسِ وَالشَّهُلَةِ فَيُنْزِيثُكُمُ بِمَا كُذْتُمُ تَعْمَلُونَ ﴾

الخطيق

# الرياضيات

- مقاييس النزعة المركزية
- المعاينة وتوزيعات المعاينة
  - مقاییس التشتت
    - الزمر
  - التكامل غير المحدد

# هبة نصر قعدان

الطبعة الأولى 2014م— 1435مـ



# المملكة الأردنية الهاشمية رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (453/ 1/ 2011)

# 510

قعدان، هبة نصر

الرياضيات: مقاييس النزعة المركزية/ هبة نصر قعدان. ــ عمان: دار صفاء للنشر والتوزيع 2011.

()ص

ر. أ: 2011/1/453

الواصفات: //الرياضيات//

 يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المسنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية أو أي جهة حكومة أخرى

# حقسوق الطبع محفوظة للناشر

Copyright © All rights reserved

الطبعة الأولى 2014م — 1435هــ



# دارصفاء للنشر والتوزيع

عمان \_ شارع الملك حسين ـ مجمع الفحيص التجاري \_ تلفاكس 4612190 6 96+. هاتف: 4611169 6 962+ ص. ب 922762 عمان \_ 11192 الأردن DAR SAFA Publishing - Distributing

Telefax: +962 6 4612190- Tel: +962 6 4611169

P.O.Box: 922762 Amman 11192- Jordan

http://www.darsafa.net E-mail:safa@darsafa.net

ردمك ISBN 978-9957-24-710-2



# الفهرس

الفصل الأول: مقاييس النزعة المركزية
الوسط الحسابي
اولاً: بيانات خام
ثانياً: الوسط الحسابي لبيانات ذات تكرار
ثالثاً: الوسط الحسابي لبيانات مبوبة
بعض خصائص الوسط الحسابي
الوسط الحسابي المرجح
الوسط الحسابي المشترك
الوسيط
المنوال
قارينقارين
الاستدلال الإحصائي
العينة العشوائية وتوزيعها٧٥
التوزيع التجربي
دالة التوزيع التجريبي
التمثيل البياني للتوزيعات التجربيية
الإحصاء وعزوم العينة
الرحصاء وحروم العيد
مرسط وبدين موسط اعيد
متوسط وتباين تباين العينة



Υξ	توزيعات المعاينة لمجموع ومتوسط عينة.
وائية طبيعية ٨١	الصيغ الخطية والتربيعية في متغيرات عث
90	التوزيع المشترك لإحصائين مرتبين
1.7	توزيع المعاينة لـ ق* (س)
١٠٨	المشمولات أو المغطيات
177	التوزيع المقارب لوسيط العينة
	تمارين
140	الفصل الثالث: مقاييس التشتت
1771	أولاً: المدى
بعي	ثانياً: نصف المدى الربيعي أو التغير الرب
	ثالثاً: الانحراف المتوسط
	رابعاً: التباين ومعامل الاختلاف
171	
170	الفصل الرابع: الزمر
170	تعاريف وخواص أولية
177	الزمر الجزئية والمجموعات المصاحبة
179	المجموعة المصاحبة
١٨٥	الزمر الداثرية
YYY	غارينعارين
777	الفصل الخامس: التكامل غير المحدد
	تعريف التابع الأصلي
YYA	خواص التكامل غير المحدد
	التكاملات المثلثية
المحادث	1 7



مقاییس النزعة الركزیة Measures of central tendency



# القصل الأول

# مقاييس النزعة الركزية

Measures of central tendency

إن حملية تكوين جدول تكواري ورسمه هي الخطوة الأولى لعرض وتلخيص البيانات المعطاة للحصول على معلومات أولية عن هذه البيانات لكنها غير كافية ويكون من المضروري أن نبحث عن طرق أخرى تفيد في الحصول على معلومات وخصائص أخرى لهذه البيانات تمكننا من التعبير عن هذه الجصائص بواسطة أرقام يسهل التعامل معها وتمكنا من عمل المقارنات بين هذه البيانات وأخرى.

ومن بين هذه الخصائص وأكثرها أهمية خاصية التمركز أو التوسط. فبالنظر إلى مفردات أي ظاهرة نلاحظ أن خالبية هذه المفردات تتراكم حول قيمة ما تسمى بمتوسط أو مركز الظاهرة ثم يتناقص عدد المفردات بالتدريج كلما بعدت عن هذه القيمة المركزية إلى الجانبين وهذا التراكم أو التمركز هو ما يطلق عليه النزعة المركزية أي ميل البيانات إلى التمركز حول قيمة معينة هي القيمة المتوسطة وتشير خاصية التمركز أو النزعة المركزية إلى موقع التوزيع أو الجنزم الأوسط منه وهناك خاصية أخرى هي خاصية تشتت أو تباعد البيانات فهي تشير إى اختلاف أو انتشار البيانات.

وفي هذا الفصل سوف نركز على دراسة الخاصية الأولى وهمي خاصية النزعة المركزية ويوجد لهذه الخاصية عدة أنواع من المقاييس شهيرة الاستخدام نذكر منها ما يلي:

١- الوسط الحسابي والوسط الحسابي المرجح.





٧- الوسيط، الربعيات، العشيرات، والميثينات.

٣- المنوال.

٤- الوسط الهندسي (G.M).

٥- الوسط التوافقي (H.M).

وتأتي شهرة هذه المقاييس من كونها سهلة الاستخدام والفهم ويمكن تناولها بصور رياضية سهلة هذا ويرى الإحصائيين أن هنـاك خــواص وشــروط معينة للمقياس الجيد نذكر منها:

- أن يكون المقياس واضح التعريف وبالتالي يمكن أن يستخدمه أناس مختلفون.
  - ٧. أن يعتمد في قياسه على كل البيانات المعطاة.
  - ٣. يتأثر بالمتغيرات التي تحدث في المجموعة أو العينة تحت الدراسة.
    - ٤. يسهل استخدامه في العمليات الرياضية.
      - ٥. هكن تمثيله بيانياً.
- آن یکون مستقر لجمیع العینات المتشابهة بمعنی آنه إذا طبق علی عینات متشابهة فلا بد أن تكون له نفس القیمة.

# \* الوسط الحسابي Arithmetic Mean

تعتمد طريقة حساب الوسط الحسابي على نوعية البيانات سواء كانت بيانات خام Data Raw أي بيانات مفردة أو بيانات ذات مجموعات Data .Data





### أولاً: بيانات خام Raw Data

إذا كان لدينا مجموعة من البيانات الحتام س، سرد، سن عددها ن فإن الوسط الحسابي لهذه المجموعة هو مجموع هذه البيانات على عددهم ويصاغ ذلك بالقانون الآتي:

ونكتب بصورة مختصرة كالآتي:  $\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{n} \omega_{i}$ 

#### مثال (١):

أوجد الوسط الحسابي لمجموعة درجات الإحصاء والتي حصل عليها (١٠) طلاب في أحد الامتحانات لمادة ١٠١ إحص وهي كالآتي ١٣، ١٤، ١٥، ١١، ١٩، ١٠، ٢٠، ٢٠، ٢٠، ٢٠، ٢١، ١٨.

#### : 141

# ثانياً: الوسط الحسابي لبيانات ذات تكرار

إذا كان لدينا مجموعة من البيانـات س، س، س، س، سم ولهـا التكـرارات المناظرة ق، ق، ق، على الترتيب بحيث أن ق، +ق، +...+ق، =ن

فإن الوسط الحسابي لهذه المجموعة هو س ويعطى بالصورة الآتية: س<u>ـــ ق. س. +ق. س. +...+ق. س.</u>





وتكتب بصورة مختصرة كالآتي:  $\overline{v} = \frac{1}{v} \stackrel{?}{\sum_{n=1}^{\infty}} \hat{v}_n$ 

#### مثال (٢):

إذا كانت درجات (٣٠) طالب من طلاب الجامعة الهاشمية في أحد امتحانات مادة ١٠١ إحص وهر كالآدر:

				ي ي	۽ سن و		
80	٤٠	47	40	۳,	۲۸	77	الدرجات
۲	٣	۳	٦	٤	0	٧	عدد الطلاب

أوجد الوسط الحسابي لهذه الدرجات.

#### : 12

بفرض أن س تمثل المدرجات وأن التكرار المناظر لهما هـو ق وبتكـوين المجدول الآتي فإن: وبإيجاد القيم الناتجة من هذا الجدول فإن ك قرر سر = ٩٤٨ كذلك فإن كى قري = ٣٠ وبالتالي يمكن حساب الوسط الحسابي كالآتي:

	التكرار	الدرجات
ق س	التكرار ق	س
١٥٤	٧	44
18+	٥	YA
17.	٤	۳۰
٧١٠	7	٣٥
118	٣	TA
17.	٣	٤٠
4+	۲	٤٥
988	۳٠	المجموع

وتسسم هيذه





الطريقة بالطريقة المباشرة أو المطولة Direct Method وهي تلمك الطريقــة الــــي تقوم بحساب الوسط الحسابي من القيم المعطاة المباشر.

أما إذا أردنا تبسيط البيانات المعطاة فيمكن لنا استخدام الطريقة المختصرة Short Method وهي طريقة تعتمد على طرح مقدار ثابت من البيانات شم إضافة هذا المقدار الثابت إلى الوسط الحسابي لجموعة البيانات الجديدة ليعطي الوسط الحسابي للبيانات قبل عملية الطرح. ولتوضيح ذلك نفرض أن لدينا بجموعة من القيم هي س١٠ س٠٠، س، بتكوارات ق١٠ ق٢٠، ، قم ولها الوسط الحسابي س وبطرح عدد ثابت إسمى الوسط الفرضي لجميع القيم المعطاة فإن القيم الجديدة تكون على الشكل الآتي:

 $\frac{1}{m} = \frac{1}{m} [(\tilde{\mathfrak{g}}_1 m_1 + \tilde{\mathfrak{g}}_7 m_7 + .... \tilde{\mathfrak{g}}_7 m_7)]^{\frac{1}{2}}$ 

وبالتالي فإن الوسط الحسابي لهذه المجموعة الجديدة هو ص

ويعطى بالصورة:

$$\frac{1}{\omega - \frac{1}{\omega}} \left[ \tilde{o}_{1} c_{1} + \tilde{o}_{2} c_{3} + \dots + \tilde{o}_{3} c_{3} \right]$$

$$\frac{1}{\omega - \frac{1}{\omega}} \left[ \tilde{o}_{1} \left( w_{1} - \frac{1}{2} \right) + \tilde{o}_{3} \left( w_{3} - \frac{1}{2} \right) + \dots + \tilde{o}_{3} \left( w_{3} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

أي أن الوسط الحسابي لمجموعة البيانات القديمة 🕡 هو عبارة عن الوسط الحسابي للمجموعة الجديدة مضافاً إليه العدد الثابت أو الوسط الفرضي ٩.





# ثَالثاً: الوسط الحسابي لبيانات مبوبة

إذا كان لدينا مجموعة من البيانات المبوبة ويتكون الجدول التكراري لها من المجموعات فإننا نستعيض عن كل مجموعة بمركزها ليكون لدينا س، س، س، س، س، س، س، س، س، سه هي عدد م من المراكز ولها التكرارات المناظرة ق، ق، ق، ق، ق، ق، ق، ق، ق، أقم ثم نقوم بحساب الوسط الحسابي كما سبق بضرب المراكز في التكرارات المناظرة وقسمة الناتج على مجموع التكرارات والمثال الآتي يوضح ذلك.

#### مثال (۳):

#### أوجد الوسط الحسابي لمجموعة البيانات الآتية:

179-17+	104-101	189-18+	144-14.	179-17.	114-11+	المجموعة
٣	Y	٣	٤	٨	1.	التكرار ق

#### : 141

بإيجاد مراكز المجموعات السابقة فإن الوسط الحسابي باستخدام الطريقة الشريقة المراقبة عن السينة المراقبة المراقبة

المباشرة هو: 
$$\overline{w} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_{i}$$
 س

#### مثال (٤):

حل المثال السابق باستخدام الطريقة المختصرة.





الحل:

بإيجاد مراكز المجموعات واختيـار القيمـة الـتي تتوسـطهم كوسـط فرضـي فنجدها ( = ٥ ، ١٣٤ ويتكوين الجدول الآتي:

ق.	د = س - ا	المركز س	التكرار ق	الجموعات
Y	Y	118,0	1+	119-11
۸٠-	١٠-	178,0	٨	179-17.
•	,	148,0	٤	189-180
۳.	1.	188,0	٣	189-18.
٤٠	٧٠	102,0	Y	104-100
4.	۳.	178,0	٣	179-17.
17			۳.	الجموع

وبالتالي فإن الوسط الحسابي المطلوب هو:

$$\overline{\psi} = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{e}_{ij} e_{ij}}{\dot{v}} \implies \overline{\psi} = 0, 171 + \frac{1 \cdot 71}{7} = 0, 171$$

ملحوظة: إذا قمنا بقسمة كل من  $1 = m_1 - 4$ ،  $1 = m_2 - 4$ ، ...،  $1 = m_3 - 4$  ملى عدد ثابت وليكن هـ وهو في الغالب يكون طول الجموعة فإن القيم الجديدة لها الشكل الآتي:

وتكون العلاقة بين الوسط الحسابي للقيم الجديدة والقيم القديمة هي:





 $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{v}^{c_{v}}}{v}$  ه وتسمى الطريقية التي تستخدم هده الصيغة بالطريقة المختزلة.

#### مثال (٥):

باستخدام الطريقة المختزلة، أوجد الوسط الحسابي للبيانات في المثال السابق.

الحل: بقسمة العمود الرابع في الجدول السابق على طول المجموعة هـ = ١٠ فإن الناتج يكون:

<u>،</u>	<u>1-0</u> = • ≥	المراكز س	التكرار ق	المجموعات
۲	٧-	118,0	1.	114-11.
۸	1-	۱۲٤,٥	٨	179-17.
*	•	178,0	٤	144-14.
٣	١	188,0	٣	189-18.
٤	Y	108,0	Y	109-10.
٩	٣	178,0	٣	179-17.
17-			۳۰	المجموع

ویکون الوسط الحسابي في هذه الحالة هو 
$$\frac{\sum_{v=1}^{2} \bar{v}_{v} c_{v}}{\bar{v}}$$
. ه $\overline{v} = 4 + \frac{1}{v}$ . ه $\overline{v} = 0$ .





ويمكن القول بأن الوسط الحسابي لمجموعة من البيانـات هــو تلـك القيمـة التي إذا أعطيت لكل بينة من البيانات لكان مجموع هذه القيم مساوي للمجمــوع الفعلى للبيانات الأصلية.

#### بعض خصائص الوسط الحسابى

 إذا كانت جميع القيم س١، س٢، س٢، س٠، س٨ متساوية وتساوي عدد ثابت أ فإن س=١.

#### البرحان:

١. باستخدام التعريف الأساسي للوسط الحسابي فإن:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} w_{i,j} = \frac{1}{2} \left( 1 + 1 + \dots + 1 \right) = \frac{0 \cdot 1}{2} = 1.$$

بإيجاد الوسط الحسابي للبيانات ص١، ص٢، ص٣٠ ...، صم فإن:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\hat{U}} \sum_{ij=1}^{n} \hat{\mathcal{D}}_{ij} \triangleq U_{ij} \qquad \hat{U} = \sum_{ij=1}^{n} \hat{\mathcal{D}}_{ij}$$

$$=\frac{1}{\dot{\upsilon}}\sum_{n=1}^{3}\check{\upsilon}_{n}\left(\left(\omega_{n}+\omega\right)\right)$$

$$=\frac{1}{0}(1\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mathbf{b}}_{v_{k}}^{n}+\mathbf{v}\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mathbf{b}}_{v_{k}})$$





وباستخدام أن: ن=كُم قي فإن ص=اس+ب

#### الوسط الحسابي المرجح

إذا كان و١، و٢، و٢، وم، مم هي أوزان القيم س١، س٢، س٠، س٠ مم على الترتيب فإن المتوسط المرجح لهذه القيم هو:

$$\mathbf{e}_{w} = \frac{\mathbf{e}_{1}\mathbf{w}_{1} + \mathbf{e}_{2}\mathbf{w}_{3} + ... + \mathbf{e}_{n}\mathbf{w}_{n}}{\mathbf{e}_{1} + \mathbf{e}_{2} + ... + \mathbf{e}_{n}}$$

#### مثال (٦):

الجدول الآتي يمثل النسب المتوية لنتائج أحد الطلاب والأوزان لهذه النسب في الفصل الدراسي الأول:

الوزن	الدرجات	المادة
٣,٥	٧٠	الإنجليزية
٤,٥	Ao	الإحصاء
٣,٥	٧o	الاقتصاد
٤	۸۰	الأحياء
۲,0	70	الفيزياء

أوجد الوسط الحسابي المرجح لهذه الدرجات؟





: 141

الآتى:	الجدول	نكون
--------	--------	------

		ي	5
وس	الوزن و	الدرجات س	المادة
750	٣,٥	٧٠	الإنجليزية
<b>7</b> AY,0	٤,٥	۸o	الإحصاء
777,0	۲,0	٧٥	الاقتصاد
44.	٤	٨٠	الأحياء
177,0	۲,٥	70	الفيزياء
پُ سِر و رسي =٥,٧٣١	پُـر و <sub>س</sub> = ۱۸		

# الوسط الحسابي المرجح هو:

$$e_{\frac{1}{12}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{r} e_{v_{j}} e_{v_{j}}}{\sum\limits_{i} e_{v_{j}}}, \quad e_{\frac{1}{12}} = \frac{\circ,7771}{\Lambda I} = \circ 7, IV$$

#### \* الوسط الحسابي المشترك Combined Mean

إذا كان لدينا مجموعتان لهما الحجم ن، ن، الوسط الحسابي س،س،س، على الترتيب فإن الوسط الحسابي المشترك لهما هو:

$$\frac{\overline{\psi_{1}\psi_{1}\psi_{1}+\psi_{1}\psi_{2}}}{\psi_{1}+\psi_{2}}=\overline{\psi_{2}}$$

مثال (V):

إذا كان لدينا مجموعتان من الطلاب لهما الحجم ١٥، ٢٠ الوسط الحسابي





لكل من أوزانهم هو ٣٠ كغم، ٧٥ كغم على الترتيب فأوجد الوسط الحسابي المشترك لهما.

#### :,|4-1

الوسط الحسابي المشترك هو:

$$\frac{\dot{U}_{1}}{\dot{U}_{1}} = \frac{\dot{U}_{1}}{\dot{U}_{1}} = \frac{\dot$$

#### \* عيزات الوسط الحسابي:

- ١. مقياس يسهل حسابه ويخضع للعمليات الجبرية بسهولة.
  - ٢. يستخدم في حسابه جميع القيم محل الدراسة.
    - ٣. أكثر المقاييس فهماً في الإحصاء.
    - هو أكثر المقاييس استقراراً.

# # عيوب الوسط الحسابي:

- ١. يتأثر بالقيم الكبيرة والصغيرة.
- يصعب حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.
  - ٣. يصعب حسابه في حالة البيانات الوصفية.

#### # الوسيط Median

أولاً: حساب الوسيط لبيانات غير مبوبة

إذا كان لدينا ن من القيم لظاهرة ما ومرتبة حسب قيمة كل منها سواء كان الترتيب تصاحدي أو تنازلي كالآتي: س،، س،، س، س، فإن:





أ) إذا كانت ن فردية فإن الوسيط هو القيمة التي تقع في الترتيب رقم  $\frac{\dot{v}+1}{r}$ . أي أن الوسيط =  $\frac{\dot{v}+1}{r}$ 

ب) إذا كانت ن زوجي فإن الوسيط هـ و الوسـط الحسابي للقيمـتين اللـتين تقعان في الترتيب رقم  $\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}}$  و  $\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}}$  +1 أي أن:

$$\frac{1+\frac{\dot{U}}{\gamma}+\frac{\dot{U}}{\gamma}+\frac{\dot{U}}{\gamma}+1}{\gamma}=\frac{1}{\gamma}$$

مثال (٨):

أوجد الوسيط للقيم الآتية: -٥، ٤، ١٣، ٠، ٣، -٢، ١٠

: 141

بترتيب هذه القيم تصاعدياً فإن -0، +7، +7، +7، +7، +7 وعدد هـذه القيم هو +7 عدد فردي وبالتالي فإن الوسيط يقع في المرتبة +7 أي أن الوسيط هو +7.

مثال (٩):

أوجد الوسيط للقيم الآتية: ١٢، -١، ٣، ٠، ١٣، ٤، -٥، ٧، ٢٠، ٨ الحل:

بترتيب هذه القيم تصاعدياً فإن -٦، -٥، ٠، ٣، ٤، ٧، ٨، ١٢، ١٣، ٠٠ وحدد هذه القيم هو ن = ١٠ وهو عدد زوجي وبالتالي فإن الوسيط هو الوسط





الحسابي للقيمتين الواقعتين في المرتبتين رقم  $\frac{1}{\gamma} = 0$  و  $\frac{1}{\gamma} + 1 = 1$  أي أن الوسيط هو  $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} = 0$ , ه.

ثانياً: حساب الوسيط لبيانات مبوبة:

في هذه الحالة تعطي البيانات في جداول تكرارية ذي مجموعـات ولحـساب الوسيط في مثل هذه الحالات يتم عمل الآتي:

 ا. إيجاد الجدول التكراري المتجمع الصاعد أو النازل (وهو ما يناظر ترتيب البيانات في حالة البيانات غير المبوية).

۲. نوجه ترتیب الوسیط وهو  $\frac{\sigma}{2}$  سواء کان ن زوجیه أو فردیة.

٣. نحدد الجموعة الوسيطية أي التي يقع فيها الوسيط.

٤. نحدد البداية الفعلية للمجموعة الوسيطة ولتكن ﴿.

٥. نحدد التكرار المتجمع السابق للمجموعة الوسيطية وليكن ق١ وكذلك
 التكرار المتجمع اللاحق للمجموعة الوسيطية وليكن ق١.

$$\frac{\dot{U}-\dot{0}}{\dot{0}}$$
,  $\dot{u}$ 

حيث هـ هي طول المجموعة الوسيطية.





#### مثال (۱۰):

# الجدول الأتي يمثل درجات ٥٠ طالب في الإحصاء، أوجد الوسيط.

- 3			• •		_ =	
89-80	<b>£ £ - £ •</b>	79-70	46-40	44-40	48-4.	الدرجات
٣	4	10	1.	٨	0	عدد الطلاب

#### : 141

# ١. نكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد كالآتي:

أقل الحدود الدنيا للمجموعة	التكرار المتجمع الصاعد لعدد الطلاب
أقل من ١٩,٥	•
أقل من ٢٤,٥	٥
أقل من ٢٩٫٥	١٣
أقل من ۳٤٫٥	. ۲۳
آقل من ۳۹٫۵	۳۸
أقل من ٥ , ٤٤	٤٧
آقل من ۹٫۵	٥٠

Y. نوجد ترتیب الوسیط وهو 
$$\frac{\dot{v}}{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma} = \gamma$$

٥. نحدد التكرار المتجمع السابق للمجموعة الوسيطية وهو ق $_1 = 37$  وكذلك التكرار المتجمع اللاحق للمجموعة الوسيطية وهو ق $_2 = 37$ .





# ٦. نعوض في القانون الأتي:

$$|l_{equiv}| = 1 + \frac{\frac{\dot{0}}{\gamma} - \ddot{0}_{\gamma}}{\ddot{0}_{\gamma} - \ddot{0}_{\gamma}}, a$$

$$| temular = 0,37 + \frac{67 - 77}{77 - 77}$$
 (٥)

TO. 1V =

 ملحوظة: يمكن للقارئ أيضاً استخدام الجدول التكراري المتجمع النازل عوضاً عن الجدول التكراري المتجمع الصاعد وبنفس الخطوات يعطي نفس قيمة الوسيط.

### \* حساب الوسيط بيانياً:

نقوم برسم المنحنى المتجمع الصاعد أو النازل ثم نحدد ترتيب الوسيط كما في المشال السابق وهدو  $\frac{\dot{U}}{\gamma}$  ثم نقدم بإسقاط عمدود من عند النقطة  $\omega = \frac{\dot{U}}{\gamma}$  على المحور الرأسي (محور التكرارات المتجمعة) ليلاقي المنحنى في نقطة نسقط بعدها عمود من هذه النقطة الموجودة على المنحنى عمود آخر على المحور الأخفى (محور المجموعات) ليلقيه في نقطة تكون هذه النقطة هي قيمة الوسيط.

طريقة أخرى: وهي رسم المنحنيات المنحنى المتجمع الـصاعد والمنحى المتجمع النازل ليتلاقى معاً في نقطة، نسقط من هـذه النقطـة عمـود علـى المحـور الأفقى ليلاقيه في نقطة تكون هذه النقطة هي الوسيط.



### مثال (۱۱):

# أوجد الوسيط بيانياً للبيانات الآتية:

الجموع	71-19	14-17	10-17	14-1+	درجات الرياضيات
40	٤	10	11	٥	عدد الطلاب

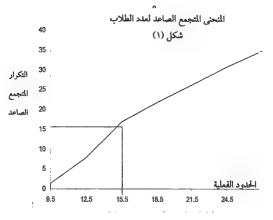
# الحل:

التكرار المتجمع الصاعد لعدد الطلاب	أقل من الحدود الدنيا للمجموعة
•	اقل من ۵ و ۹
0	أقل من ١٢,٥
17	آقل من ۱۵٫۵
71	آقل من ۱۸٫۵
40	أقل من ٢١,٥

وبرسم هذه القيم يكون المنحنى التكراري المتجمع الصاحد لـه الـشكل الآتي:







ويإسقاط عمود أفقي من عند النقطة المناظرة للتكرار  $\frac{ro}{\gamma}$  = 17,0 على مور التكرار المتجمع الصاعد ليلاقي المنحنى في نقطة نسقط من هذه النقطة عمود آخر على محور المجموعات ليلاقيه عند القيمة 9,00 وهي القيمة الوسيط (انظر شكل رقم 1).

#### # عيزات الوسيط

١- مقياس لا يتأثر بالقيم المتطرفة.

٧- يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.

٣- يكن إيجاده بيانياً.





٤- يمكن إيجاده من بيانات وصفية يمكن ترتيبها كتقـديرات الطـالاب على
 سبيل المثال.

### \* عيوب الوسيط

- ١- لا يأخذ جميع القيم في الاعتبار عند حسابه.
- ٢- لا يسهل التعامل معه في التحليل الإحصائي.

### \* الربيعيات Quartiles العشيرات Deciles والثينات

#### ١. الربيعيات Quartiles

عند حساب الوسيط وجدنا أنه القيمة التي تتوسط البيانات أو بطريقة أخرى هي القيمة التي تقسم البيانات المرتبة سواء تصاعدياً أو تنازلياً إلى جزئين متساويين بالمثل فإن الربيعيات تقسم البيانات المرتبة سواء تصاعدياً أو تنازلياً إلى أربعة أجزاء متساوية.

ويعرف الربيع الأول بأنه تلك القيمة التي يسبقها ربع البيانات ويرمز له بالرمز رر كذلك فإن الربيع الثاني هو القيمة التي يسبقها نصف البيانات ويرمز له بالرمز رر وهو يساوي الوسيط. أما الربيع الثالث فهو الذي يسبقه ثلاثة أرباع البيانات ويرمز له بالرمز رم. وطريقة حساب كل منهم تعتمد على تحديدنا لترتيب الربيع فالربيع الأول له الترتيب  $\frac{\dot{v}}{z}$  أما الربيع الثاني فله الترتيب  $\frac{\dot{v}}{z}$  أما الربيع الثالث فترتيبه هو  $\frac{\dot{v}}{z}$  حيث ن هي عدد البيانات المعطاة سواء كان فردياً





أو زوجياً، ثم نقوم بتحديد المجموعة الربيعية كما سبق في حساب الوسيط مع اختلاف المسمى من مجموعة وسيطية إلى مجموعة ربيعية والتعويض في القانون:

$$c_{v} = 4 + \frac{\frac{2v\dot{v}}{1} - \ddot{v}_{v}}{\ddot{v}_{v} - \ddot{v}_{v}}. \quad \lambda \quad y = 1, Y, Y.$$

 $\frac{200}{2}$ : ترتیب الربیع رقم ي، وحیث ن عدد البیانات.

البداية الفعلية للمجموعة الربيعية.

ق١: التكرار المتجمع السابق للمجموعة الربيعية.

ق،: التكرار المتجمع اللاحق للمجموعة الربيعية.

هـ: طول الجموعة الربيعية.

#### \* العشرات Deciles

بالمثل فإن العشيرات تقسم البيانات المرتبة سنواء تساعدياً أو تنازليـاً إلى عشرة أجزاء متساوية وعدد هذه العشيرات هو تسعة عشيرات.

ويعرف العشير الأول بأنه تلك القيمة التي يسبقها عشر البيانات ويرمز لله بالرمز  $c_1$  كذلك فإن العشير الثاني هو القيمة التي يسبقها  $\frac{\Upsilon}{1}$  من البيانات ويرمز له بالرمز  $c_1$  وهكذا فإن العشير الخامس هو الذي يسبقه  $\frac{\circ}{1}$  من البيانات وهو يساوي الوسيط أي أن الوسيط =  $c_1$  =  $c_2$  بالمثل فإن العشير التاسع هو الذي يسبقه  $\frac{\circ}{1}$  من البيانات.

وطريقة حساب كل منهم تعتمد على تحديدنا لترتيب العشير فإذا كان عدد البيانات المعطاة هو ن فإن العشير الأول له الترتيب  $\frac{\dot{V}}{1}$  أما العشير الثانيفله الترتيب  $\frac{\dot{V}}{1}$  والعشير رقم ي فهو ترتيبه هو  $\frac{v_i}{1}$  حيث ي =  $\frac{v_i}{1}$ ..... ٩. ثم نقوم بتحديد المجموعة العشيرية كما سبق في حساب الوسيط والربيعيات مع اختلاف المسمى من مجموعة وسيطية إلى مجموعة عشيرية والتعويض في القانون:

$$\mathcal{L}_{v} = \{ \mathbf{1} : \mathbf$$

 $\frac{v_{ij}}{2}$ : ترتیب العشیر رقم ي.

إ: البداية الفعلية للمجموعة العشيرية.

ق١: التكرار المتجمع السابق للمجموعة العشيرية.

قy: التكرار المتجمع اللاحق للمجموعة العشيرية.

هـ: طول الجموعة العشيرية.

### # الثينات Percentiles

كذلك فإن النقاط التي تقسم البيانات المرتبة سواء تصاعدياً أو تنازلياً إلى مائة جزء متساوي تسمي المثينات وحددها ٩٩ مئين. ويعرف الحين الأول بأنه تلك القيمة التي يسبقها ١٪ من البيانات ويرمز له بالرمز م، كذلك فإن المعين الثاني هو القيمة التي يسبقها ٢٪ من البيانات ويرمز له بالرمز م، وهكذا فإن المئين الخامس والعشرون م، هو المذي يسبقه ٢٠٪ من البيانات أي يساوي

YI



الربع الأول وكذلك فإن المئين الخمسون م. ويسبقه ٥٠٪ من البيانـات وهـ و يساوي الوسيط وبالتالي يكون لدينا العلاقات التالية:

وبالتالي فإن المئين رقم ٩٩ يسبقه ٩٩٪ من البيانات، وطريقة حساب كل منهم كما سبق في حساب الوسيط والربيعيات والعشيريات مع اختلاف المسمى من مجموعة وسيطية إلى مجموعة مثينية والتعويض في القانون:

$$a_{0} = \frac{2\dot{O}}{1} - \ddot{O}_{1}$$
 $a_{0} = \frac{1}{2} + \frac{2\dot{O}}{1} + \frac{2\dot{$ 

 $\frac{200}{100}$ : ترتیب المثین رقم ي.

البداية الفعلية للمجموعة المثينية.

ق١: التكرار المتجمع السابق للمجموعة المئينية.

ق،: التكرار المتجمع اللاحق للمجموعة المثينية.

هـ: طول المجموعة المثينية.

#### مثال (۱۲):

احسب القيم را، رب، دب، مه، م. من البيانات الآتية:

الجموع	79-7:	09-00	19-11	49-4.	Y4-Y+	14-1+	درجات الرياضيات
٨٠	٥	1.	40	**	1.	٨	عدد الطلاب

#### : 141

لدينا ن = ٨٠ هو عدد البيانات نقوم بتكوين الجدول التكراري المتجمع



Itani Itali

### الصاعد كما يلي:

التكرار المتجمع الصاعد لعدد الطلاب	أقل من الحدود الدنيا للمجموعة
السورار المعجمع الطباطة الطارب	أقل من ۹٫۵
٨	أقل من ١٩٫٥
1.4	أقل من ۲۹٫۵
٤٠	أقل من ٥, ٣٩
70	أقل من ٤٩,٥
٧٥	أقل من ٥٩٥٥
۸۰	أقل من ٥,٦٩

۱. حساب ر، فإن ترتيبه هو 
$$\frac{\dot{v}}{2} = \frac{\Lambda^*}{2} = \Upsilon$$
 وبالتالي فإن:

$$\Upsilon$$
• وعليه د  $= \{+\frac{\dot{\upsilon}}{\dot{\upsilon}_{\gamma}} - \dot{\upsilon}_{\gamma}$  ه أي أن د  $= 9 + 7 + \frac{10 - 7}{10 - 10}$  (۱) وعليه د د و الم

۲. حساب ر
$$_{7}$$
 فإن ترتيبه هو  $\frac{7}{3} = \frac{7 \times 7}{2} = 7$  وبالتالي فإن:

۳. حساب 
$$c_Y$$
 فإن ترتيبه هو  $\frac{Y}{1} = \frac{Y \times A}{1}$  وبالتالي فإن:



$$\text{TV,o=(1.)} \frac{\frac{7\,\dot{\upsilon}}{1.}}{\dot{\upsilon}_{\gamma}-\dot{\upsilon}_{\gamma}}. \text{ A ly is } \upsilon_{\gamma}=0.$$

3. حساب م، فإن ترتيبه هو 
$$\frac{\alpha_0}{\alpha_0} = \frac{\alpha \times \alpha}{\alpha_0} = 3$$
 وبالتالي فإن:

15,0=(1.) 
$$\frac{0.6}{1.0}$$
 +4,0=  $\frac{0.6}{1.0}$   $\frac{0.6}{1.0}$  +  $\frac{0.6}{1.0}$  +  $\frac{0.6}{1.0}$  = 0.15,0=(1.)

٥. حساب م، و فإن ترتيبه هو 
$$\frac{10}{100} = \frac{100}{100} = 20$$
 وبالتالي فإن:

مثال (۱۳):

احسب القيم رب، ده، مه من البيانات الآتية:

			•	0	1	1 -	
المجموع	78-74	77-71	7 19	14-14	17-10	درجات الرياضيات	
٤٠	٣	4	10	1.	۳	عدد الطلاب	

#### الحل:

لدينا ن = ٤٠ همو عدد البيانات نقوم بتكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد كما يلي:

التكرار المتجمع الصاعد لعدد الطلاب	أقل من الحدود الدنيا للمجموعة
è	أقل من ١٤,٥



LM	
Ideal I I I I I I I I I I I I I I I I I I I	
۲	أقل من ١٦,٥

۲	أقل من ١٦,٥
17"	أقل من ٥ ،١٨
AY	اقل من ۲۰٫۵
۲V	أقل من ۲۲٫۵
٤٠	أقل من ٢٤,٥

لإيجاد رب نحدد ترتيبه أولاً وهو  $\frac{Y}{2} = \frac{Y \times 2}{2} = Y$  حيث ن هي مجموع التكرارات. وتكون بداية المجموعة الربيعية هي 4 = 0.1 وبالتالي فإن التكرارات السابقة واللاحقة وطول المجموعة هي هـ = Y، ق $_{1} = Y$ ، ق $_{2} = Y$ ، قانون الربيعيات نجد أن:

$$C_{y} = 4 + \frac{\frac{\gamma_{\dot{\mathbf{U}}} - \hat{\mathbf{U}}_{1}}{3} - \hat{\mathbf{U}}_{1}}{\hat{\mathbf{U}}_{y} - \hat{\mathbf{U}}_{1}}, \mathbf{A} = 0, \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{y} - \mathbf{y}t}{\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{y}t} \times \mathbf{y} = \mathbf{y}3, \mathbf{P}t$$

وبالتالي فإن الوسيط = ر٢ = ١٩,٤٣ بالمثل فإن:

$$11, \xi T = T \times \frac{1 Y - T}{1 Y - Y} + 1 A, 0 = A. \frac{\dot{0}}{1} \cdot \dot{0} + \dot{0} = T \times \frac{1 Y - T}{1 Y - Y} + 1 A, 0 = A.$$

أي أن الوسيط = ر<sub>٢</sub> = ده = ١٩, ٤٣ وأخيراً نوجد مه٢

$$\gamma_{0} = \gamma_{0} + \frac{\sigma_{0}^{2} - \tilde{\sigma}_{0}}{\tilde{\sigma}_{0} - \tilde{\sigma}_{0}} + \gamma_{0} = \gamma_{0} + \gamma_{0}$$

.14,4=





#### \* ملحوظة:

يمكن أيضاً تعيين كل من الربيعيات والعشيرات والمثينات بيانياً كما سبق في تعيين الوسيط بيانياً.

#### # النوال Mode #

يعرف المنوال بأنه القيمة الموجودة ضمن مجموعة من البيانات وتكون هذه القيمة هي الأكثر تكراري أؤذا كانت مجموعة البيانات هذه لها توزيع تكراري فإن المنوال هو القيمة المناظرة لأكبر تكرار. أي أن المنوال هو القيمة المناظرة لأكبر تكرار. أي أن المنوال هو القيمة الأكثر شيوعاً بين القيم.

#### مثال (۱٤):

أوجد المنوال للقيم ٥، ٦، ٧، ٨، ٥، ٧، ٦، ٧.

#### : 141

القيمة الأكثر تكراراً هي ٧ وبالتالي فإن المنوال هو ٧.

#### مثال (۱۵):

أوجد المنوال للقيم ٦، ٧، ٥، ٩، ٨، ٧، ٣، ٥.

### الحل:

في هذه الحالة يوجد أكثر من منوال فكل من ٥ و ٦ و ٧ هي قيم منوالية. مثال (١٦):

أوجد المنوال للقيم ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ٥، ٧، ٦، ٨، ٩.





الحل: في هذه الحالة نجد أنه لا توجد قيمة أكثر تكراراً وبالتالي لا يوجد منوال.

ويلاحظ أنه إذا كان للمجموعة منوال واحد سميت المجموعة وحيدة المنوال كما في مثال (١٤)، وإذا تعدد المنوال أي كان هناك أكثر من منوال سميت المجموعة متعددة المنوال كما في مثال (١٥) وتسمى المجموعة بعديمة المنوال إذا لم يوجد لها منوال كما في مثال (١٥).

## \* المنوال في حالة البيانات المبوبة:

تمريف المجموعة المنوالية Mode class

وتعرف المجموعة المنوالية بأنهـا المجموعـة الــــي يقــع فيهــا المنـــوال وتكـــون مناظرة لأكبر تكرار.

فإذا تم تحديد المجموعة المنوالية تقوم بحساب المنوال عن طريـق التعـويض المباشر في الصيغة التالية:

حيث:

إ = بداية المجموعة المنوالية الفعلى.

قم = التكرار المناظر للمجموعة المنوالية.

ق، = التكرار السابق للمجموعة المنوالية.

ق، = التكرار اللاحق للمجموعة المنوالية.

هـ = طول المجموعة المنوالية.





ويمكن كتابة القانون السابق بالصورة.

المنوال = 
$$1 + \frac{1}{4 + 4}$$
. ه حيث  $1 = 0$ 

و دى = قىم – قى، ولذا تسمى هذه الطريقة بطريقة الفروق.

مثال (۱۷):

## احسب المنوال لجموعة البيانات الآتية:

الجموع	78-77	17-71	Y 14	14-17	17-10	درجات الرياضيات
٤٠	٣	4	10	1.	٣	عدد الطلاب

#### : 141

نحدد المجموعة المنوالية فتكون هي ١٩-٢٠ وبالتالي فإن:

أ = ١٨,٥ ، قم = ١٥، ق، = ١٠، ق، = ٩، هـــ = ٢ ويــالتعويض في القانون السابق فإن:

أو يمكن تطبيق الصورة الثانية لطريقة الفروق كالآتي:

#### ملحوظة:

هناك طريقة أخرى تسمى طريقة الرافعة وتعتمد هذه الطريقة على فـرض أن المنوال يقع على مسافة معينة من البداية الفعلية للمجموعة المنواليـة ولــتكن





 س ثم نقوم بتعيين هذه المسافة بقانون الروافع وإضافة هذه القيمة س إلى البداية الفعلية للمجموعة المنوائية فتكون قيمة المنبوال وتعطي البصيغة النهائية لهذه العملية بالصورة:

حيث ق١، ق٢، أ، هـ هي تلك القيم المعرفة سابقاً.

تعيين المنوال بيانياً

لتعيين قيمة المنوال بيانياً نقوم برسم المدرج التكراري للمجموعة المنوالية والمجموعة المنوالية والمجموعين السابقة والتالية لها ثم نصل النقطة الابتدائية بأعلى العمود المناظر للمجموعة المنوالية بالنقطة الابتدائية الموجودة بأعلى العمود بأعلى العمود المناظر للمجموعة المنوالية وكذلك نصل النقطة النهائية الموجود بأعلى العمود المناظر للمجموعة المنوالية بالنقطة النهائية الموجودة بأعلى العمود المناظر للمجموعة المنوالية بالنقطة النهائية المعمودة بأعلى نقطة نقوم بإسقاط عمود من هذه النقطة على المحور الأفقي الممثل للمجموعات فتكون نقطة تقاطع عمود من هذه النقطة على المحور الأفقي الممثل للمجموعات فتكون نقطة تقاطع هذا العمود والحور الأفقي هي القيمة المنوالية.

#### مثال (۱۸):

### احسب المنوال لمجموعة البيانات الآتية بيانياً.

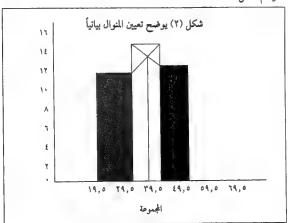
	79-70	09-01	£4-£=	44-4.	Y4-Y+	المجموعات
Ì	1.	١٣	10	14	1.	التكرار





الحل:

غدد المجموعة المتوالية فتكون هي ٥ , ٩ - ٩ ، ٩ بالتالي نرسم المدرج التكراري للمجموعة المتوالية والمجموعين المجاورتين لها شم نصل نقطة البداية العليا للعمود التكراري المناظر للمجموعة المتوالية بنقطة البداية العليا للعمود التكراري المناظر للمجموعة بعد المتوالية وكذلك نصل النقطة النهائية العليا للعمود التكراري المناظر للمجموعة ألمتوالية بالنقطة النهائية العليا للعمود التكراري المناظر للمجموعة قبل المتوالية فيتقاطع الخطان في نقطة نسقط من هذه النقطة عمود على الحور الأفقي ليلاقيه في نقطة تكون هي النقطة المتوالية (انظر الرسم شكل ((٢)).







- أ) عيزات المنوال
- ١) سهل حسابه وقهمه
- ٢) لا يتأثر بالقيم المتطرفة
- ٣) لا يحتاج لإعادة ترتيب البيانات إذا كان عددها قليل.
  - ٤) يمكن إيجاده للقيم الوصفية والتوزيعات المفتوحة.
    - ب) عيوب المنوال
  - ١) لا يأخذ في الاعتبار جميع القيم عند حساب المنوال.
- ٢) يوجد لحسابه أكثر من صورة وبالتالي يكون له أكثر من قيمة مختلفة.
  - ٣) لا يمكن تناوله بالعمليات الجبرية.
- ٤) قد يكون للبيانات الواحدة أكثر من منوال وقد لا يكون هناك منوال لها.
  - العلاقة بين مقاييس النزعة المركزية المختلفة

في حالة التوزيعات التكرارية المتماثلة والأحادية المنوال تكون جميع المقاييس الوسيط، الوسط، المنوال متساوية ولكن إذا كان التوزيع ملتو التواء بسيطاً فإن هناك ثمة علاقة تجريبية نتجت وهي:

الوسط - المنوال = ٣ (الوسط - الوسيط)

ولا تتحقق هذه العلاقة في حالة زيادة حدة الالتواء.





# \* الوسط الهندسي Geometric mean (G.M)

إذا كان لدينا مجموعة ن من البيانات الغير صفرية س،، س،، س»، س،، سن فإن الوسط الهندسي لهذه القيم هو:

ونظراً لـصعوبة الجـذر النـوني يمكـن كتابـة الـصورة الـسابقة باسـتخدام اللوغاريتمات كالآتي:

$$\text{le }_{(|t_{l}| \text{ odd } |h_{l}| \text{ odd})} = \frac{l}{\dot{\upsilon}} \sum_{j \neq l}^{\dot{\upsilon}} \text{le } \upsilon_{\upsilon_{j}} \Rightarrow \text{le } \text{odd } \text{latter}_{\upsilon_{j}} = \text{le } \left(\frac{l}{\dot{\upsilon}} \sum_{j \neq l}^{\dot{\upsilon}} \text{le } \upsilon_{\upsilon_{j}}\right)$$

وإذا كانت هذه البيانات تحدث بتكرارات بمعنى إذا كانت س، س، س، س، س، س، س، س، س، التكرارات ق، ق، ق، ...، ق، على الترتيب فإن الوسط الهندسي في هذه الحالة هو:

$$\frac{1}{6}$$
 الوسط الهندسي = (س المرابع مرابع مرابع مرابع مرابع المرابع مرابع مرابع المرابع الم

حيث ن=كَيِّ ق, والتي يمكن كتابتها باستخدام اللوغاريتمــات للأســاس الطبيعي (هــ) كالأتى:

$$\text{le(itend throug)} = \frac{1}{0} \sum_{j=1}^{n} \tilde{D}_{ij}$$
 .  $\text{le av.}_{ij}$ 

$$(v_{ij}) = v_{ij} = v_{ij} + v_{ij}$$
الوسط الهندسي =  $v_{ij} = v_{ij} + v_{ij}$ 





#### # ملحوظة:

إذا كانت البيانات المعطاة مبوبة أي ذي مجموعات فإننا نستعيض عن كـل مجموعة بمركزها وتكرارها المناظر ونعوض في الصيغة السابقة.

مثال (۱۹):

احسب الوسط الهندسي للبيانات الآتية: ٥، ٧، ٨، ٩، ١٠.

الحل:

نكون الجدول الآتي لحساب المجموع يُسْ لوسي:

وبالتالي فإن الوسط الهندسي هو:

لو س	القيمة س
1,71	٥
1,90	٧
۲,۰۸	٨
۲,۲۰	4
۲,۳۰	1.
ت کے لوسی = ۱۲۰۰۱	

$$|l_{Q}| = l_{Q} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l} l_{Q} w_{i} \right)$$

$$= l_{Q} \frac{(\frac{1}{2} \cdot 1, \cdot 1)}{6} = PPO, V$$

ويلاحظ أن الوسط الحسابي لهذه القيم

هو  $\sqrt{V, N}$  أي أن  $\sqrt{W} \ge 1$  الوسط الهندسي.





#### مثال (۲۰):

# احسب الوسط الهندسي لمجموعة البيانات الآتية:

					<b>T</b>	•
المجموع	78-77	17-77	Y 14	14-14	17-10	درجات الرياضيات
٤٠	٣	4	10	11	٣	عدد الطلاب

### الحل:

# نكون الجدول الآتي لحساب المجموع: كُرِق، لوس،

wy			
قي لو سي	لو سي	التكرار قي	المركز سي
۸,۲۲	۲,٧٤	٣	10,0
۲۸,٦٢	۲,۸٦	1.	۱۷,٥
\$1,00	۲,۹۷	10	19,0
17,71	٣,٠٧	4	Y1,0
٩,٤٧	4,10	٣	۲۳,٥
يُ ق لوسي = ١١٨,٤٧		ن = ٠٤	

# وبالتالي فإن الوسط الهندسي هو:

### \* عيزات الوسط المناسي:

 ١. من أهم المقايس التي يمكن استخدامها للإشارة بمعدلات التغير أو النس.





٢. يسهل حسابه والتعامل معه جبرياً.

٣. يعتمد في حسابه على جميع القيم.

٤. يستخدم كثيراً في الأرقام القياسية Index numbers.

# # عيوب الوسط المندسي:

١. ليس من السهل فهمه ويلزم له معرفتنا باللوغاريتمات.

٢. لا يمكن حسابه إذا كان هناك من القيم قيم صفرية أو سالبة.

### # الوسط التوافقي (Harmonic Mean (H.M.)

$$\frac{v}{v_0} = \frac{v}{v_0} + \frac{v}{v_0} + \frac{v}{v_0} + \frac{v}{v_0}$$

مثال (۲۱):

احسب الوسط التوافقي للقيم ٤، ٥، ٧، ٩

#### الحل:

$$v_{0} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = v_{0}$$

وإذا كانت البيانات المعطاة تحدث بتكرارات بمعنى إذا كانت س، س، س، س، س، س، شا التكرارات ق، ق، ق، ش، ن، قم على الترتيب فإن الوسط التوافقي في هذه الحالة هو:





$$\overline{z_0 | b_0} = \frac{\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + ... + \bar{b}_4}{\bar{b}_1}$$

$$\overline{b}_1 + \frac{\bar{b}_2}{\bar{b}_2} + ... + \frac{\bar{b}_4}{\bar{b}_4}$$

### # ملحوظة:

- إذا كانت البيانات المعطاة مبوبة أي ذي مجموعات فإننا نستعيض عن كل
   مجموعة بمركزها وتكرارها المناظر وتعوض في الصيغة السابقة.
  - Y. العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي والوسط التوافقي هي:  $\overline{w} \ge 10$  العدد المندسي  $\infty$  توافق الوسط.

#### مثال (۲۲):

إذا كان الوسط الحسابي لعددين هو ٥ ووسطهم الهندسي هو ٥ فما همــا العددين؟.

#### الحل:

بفرض أن العددين هما س، ص وبالتالي فإن الوسط الحسابي لهما هو:

ويكون الوسط الهندسي هو = السبس = وبالتربيع للطرفان فإن: س. ص = ٢٥ ومنها فإن:

$$w=\frac{ro}{m}$$
 بالتعويض عن ذلك في المعادلة الأولى فإن:

$$\frac{70}{00}$$
 + $\omega$  وبحل هذه المعادلة من الدرجة الثانية فإن:

$$-0.00$$
 من  $-0.00$  ان س = ص = ٥٠ من ان س = ص = ٥٠ من ان س





مثال (۲۳):

أوجد الوسط الحسابي، والهندسي والتنوافقي الآنيـة: ٣٢، ٣٥، ٣٣، ٣٧، ٣٩، ٣٩، ٤٣، ٣٣، ٣٩، ٣٩، ٤٣، ٤٣، ٣٩، ٣٩، ٤٠ الوسط الهندسي > الوسط التوافقي. الحق:

$$(\overline{v} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{v} v_i)$$
 الوسط الحسابي لهذه الأرقام

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( 77 + 07 + 77 + 77 + 73 + 73 \right) = \frac{1}{2}$$

أما الوسط الهندسي فهو = 
$$\frac{1}{v} \left( \frac{1}{v} \sum_{y=1}^{v} v_y \right)$$

$$= le \left( \frac{\circ 7, \circ 7}{V} \right) = 12, V7$$

وأخيراً فإن الوسط التوافقي هو:

$$|l_{q}| = \frac{1}{|l_{q}|} = \frac{1}{|l_{q}|} + \frac{1}{|l_{q}|} + \frac{1}{|l_{q}|} = \frac{1}{|l_{q}|} = \frac{1}{|l_{q}|} = \frac{1}{|l_{q}|} = \frac{1}{|l_{q}|} + \frac{1}{|l_{q}|} = \frac{$$

وواضح أن:

TV.0Y2TV, £12TV, Y0

 $\overline{n} \ge 1$  أن الوسط التوافقي 1 الوسط الهندسي





### تمارين

احسب الوسط الحسابي والوسيط والمنبوال للبيانات الآتية ١٠، ١٧، ٥،
 ٢، ٥، ٧، ٨.

٢. أوجد كل من الوسيط والربيع الثالث بيانياً لمجموعة البيانات الآتية:

			C	
14-11	44-4.	79-7.	19-11	الدرجات
1.	١٢	11	٧	عدد الطلاب

٣. أوجد الوسط الحسابي والمنوال وكذلك الوسط الهندسي للبيانات الآتية:

10-17	17-11	1 · - A	V-0	الأوزان
Y	٣	1.	٥	عدد الأطفال

٤. إذا كان هناك شركة تنتج الملابس الجاهزة للرجال والسيدات. وكان نسبة الربح من المبيعات هو ١٥٪ فإذا كانت نسبة الربح من بيع ملابس الرجال هي ٨٪ وكان ملابس السيدات تشكل نسبة ٥٠٪ من المبيعات فما هي نسبة الربح من ملابس السيدات.

أوجد الربيع الثالث والعشير الرابع والمئين التسعون للقيم الآتية:

4.,0-44,0	77,0-78,0	78,0-71,0	Y1,0-1A,0	14,0-10,0	الأوزان
3.7	77	۳.	**	٨	عدد الأطفال

 ٦. إذا كان لدينا مصنع ما ينتج ثلاثة أنواع من الملابس وكان عدد الأنواع الثلاث هي ٢٥، ٥٥، ٣٠ ومتوسط كل نـوع هـو ٥، ٣,٢٥، ٥،٥ علـى الترتيب فما هو المتوسط المشترك لهذه الأنواع الثلاث.





- ٧. إذا كانت القيم  $m_1$ ،  $m_2$  قيم غير سالبة فبرهن أن  $m \ge 1$  الوسط الهندسي وهل يمكنك تعميم ذلك لعدد ن من القيم الموجبة.
- ۸. أوجد الوسط الحسابي للبيانات ۵۳، ۷۳، ۹۳، ۹۳، ۱۵۳، عملومة الوسط الحسابي لبيانات أخرى هي ۵، ۷، ۹، ۱۰، ۱۰ (لاحظ أن ص= 100 + 100).
- ٩. اكتب قيمة كل من ب، ج التي تحقق العلاقة التجريبية في حالة التواء التوزيم التواء بسيطاً:

الوسط - المنوال = ( (الوسط - الوسيط).

١٠. أكمل الفراغ فيما يلي:

 أ) مـن مقـاييس النزعـة المركزيـة الـتي يـسهل التعامـل معهـا جبريـاً هو......

- ب) تسمى التوزيعات التي لها أكثر من منوال بـ....
- جـ) يقع ...... بين الوسط الحسابي والوسط التوافقي.
- د) تــستخدم الجــداول التكراريــة المتجمعــة في حــساب كــل مــن ...........
  - هـ) المنوال هو القيمة.....
- و) الوســط الهندســي لمجموعــة مــن القــيم تحــوي بيــنهم القيمــة صــفر يساوى......





 ١١. ضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخاطئة في الجمل الآتية:

أ) تتأثر قيمة الوسيط أكثر بالقيم المتطرفة عن الوسط الحسابي.

ب) الوسط الحسابي يكون دائماً هو أفضل مقاييس النزعة المركزية.

جـ) يقع الوسط الهندسي بين الوسط الحسابي والوسط التوافقي.

د) يستخدم الوسط الهندسي في حساب المعدل للأرقام القياسية.

هـ) لأي توزيع تكراري يمكننا استخدام العلاقة التجريبية.

الوسط - المتوال = ٣ (الوسط - الوسيط)

و) الربيع الأول هو القيمة التي تسبقه ٥٠٪ من البيانات.

ي) المنوال هو قيمة تتكرر كثيراً بين القيم.

 أوجد العشير الثالث والربيع الأول وكمالك المثين العشرون لمجموعة البيانات الآتية:

T+,0-TV,0	YV,0-Y£,0	71,0-71,0	Y1,0-1A,0	14,0-10,0	الأوزان
4 8	77	יץ	**	A	عدد الأطفال

١٣. احسب الوسط التوافقي للقيم ٨، ٧، ١٣، ١١، ١٢، ١٠.

١٤. أوجد قيمة جـ التي تجعل قيمة الوسط الحسابي ٢٧, ٤٥ للبيانات الآتية:

	46			<u> </u>			
78-77	V1-79	アアースア	70-75	77-70	الأوزان		
٨	۲۷	ج	١٨	٥	عدد الأطفال		

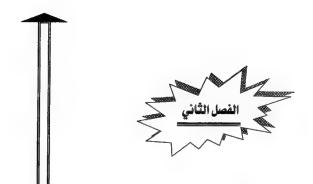




١٥. أوجد الوسيط والمنوال للبيانات في التمرين السابق.

 ١٦. أوجد الربيع الأول وكذلك العشير الثالث والمــثين العاشــر للبيانــات في التمرين السابق بيانياً.

۱۷. أوجد الوسط الحسابي للبيانات ۲، ۲، ۳، ...، ن والتي تحدث بتكرارات هي ( $^{0}$ )،  $(^{0}$ )،  $(^{0}$ )،  $(^{0}$ )،  $(^{0}$ )،  $(^{0}$ )،  $(^{0}$ )،  $(^{0}$ )، التوافيق المعروفة.



المعاينة وتوزيعات المعاينة



# الفصل الثاني المعاينة وتوزيعات المعاينة

#### مقدمة:

لن نعمد في هذا الفصل إلى بحث كامل لنظرية المعاينة، بل سنقتصر على ما هو لازم وضروري لدراسة نظرية التقدير. لذا سنتعرض فقط للحالات الي توافق نموذجاً لملاحظات متكررة ومستقلة على متغير عشوائي حقيقي ع، ونقدم بعض المفاهيم الأساسية في نظرية المعاينة كالاستدلال الإحصائي، العينة العشوائية، التوزيع التجريي، عزوم العينة، الإحصاءات المرتبة... الغ، ومن شم نبحث في توزيعات المعاينة لبعض الصيغ الخطية والتربيعية في متغيرات العينة، بالإضافة إلى دراسة موجزة للإحصاءات المرتبة وتوزيعاتها الاحتمالية، حيث إن هذه الأخيرة مهمة جداً عند دراسة الاستدلال الإحصائي اللامعلمي، وأخيراً، دراسة تقارب بعض عيزات العينة وتوزيعات المعاينة في حالة عينات كبيرة.

# الاستدلال الإحصائي: Statistical Inference

يعزى دائماً تقدم العلوم للتجريب، وإذا أنجز الباحث تجربة وتحمصل علمى بعض المعلومات وبناءً على هذه المعلومات توصل إلى نتائج معينة، وهذه النتائج عادة تتجاوز مواد وعمليات التجربة الخاصة.





وبعبارة أخرى، يستطيع الباحث التعميم من التجربة الخاصة إلى صف كل التجارب المشابهة.

يدعى هذا النوع من التمديد من الخاص إلى العام بـ الاستدلال الاستقرائي inductive inference ويعتبر إحدى طرق الوصول إلى معرفة جديدة.

لا تعطى طريقة الاستدلال الاستقرائي تعميمات مؤكدة، لكن يمكن قياس درجة الشك (أو درجة الثقة) بتلك التعميمات فيما إذا أنجرت التجربة وفق مبادئ معينة. وإحدى مهام الإحصاء تتمشل في تقديم الأساليب لإجراءات استدلالات استقرائية وقياس درجة الثقة في كل استدلال وذلك بعبارة احتمالية.

وتجدر الإشارة هنا إلى نوع آخر من الاستدلال، الـذي يـدعى الاسـتدلال الاسـتنتاجي أوصل اللها أن النتـائج الـني نتوصل إليها بواسـطة الاسـتدلال الاسـتقرائي احتمالية، إلا أن النتـائج الـني نتوصل إليها بواسطة الاستدلال الاستنتاجي قطعية (مؤكدة).

ولإيضاح الاستدلال الاستنتاجي، لنفترض لدينا العبارتين الآتيتين:

١. إحدى الزوايا الداخلية في كل مثلث قائم تساوي ٩٠ درجة.

المثلث أ قائم. إذا قبلنا بالعبارتين السابقتين فنصل قطعاً إلى النتيجة:

٣. إحدى الزوايا الداخلية في المثلث أ تساوي ٩٠ درجة.





تدعى العبارة (١) بالمقدمة الكبرى، والعبارة (٢) بالمقدمة الصغرى، بينما العبارة (٣) فتدعى بالنتيجة.

نلاحظ أن طريقة الاستدلال الاستنتاجي هي الانتقال من العام إلى الخاص أي عكس الاستدلال الاستقرائي، بالإضافة إلى أنها تعطي نتائج مؤكدة.

بالرغم من أن الاستدلال الاستنتاجي مهم جداً، وخاصة في الرياضيات، للوصول إلى معارف جديدة، إلا أن الكثير من المعارف الجديدة في مختلف الميادين يتم الوصول إليها باتباع طريقة الاستدلال الاستقرائي.

لنوضح الآن الاستدلال الاستقراعي بمثال بسيط. لنفترض لدينا صندوق تخزين يحتوي على ١٠ مليون بذرة ورد، ونعلم أن كل بدرة تنتج وردة بيضاء أو حراء. فيما لو زرعت. ونريد معرفة ما يلي: - كم عدد (أونسية) البدور ضمن الـ ١٥ مليون بذرة التي ستنتج ورود بيضاء؟ الطريقة الوحيدة التي تمكننا الإجابة على هذا السؤال وبدقة تامة هي زراعة كل البدور الـ ١٠ مليون وملاحظة عدد الورود البيضاء.

لكن هذه الطريقة غير عملية لأننا نريد بيع البذور، وحتى إذا لم نـرد بيـع البذور، فرخب في الإجابة على هذا السؤال بأقل تكلفة وجهد ممكنين وأحياناً في أسرع وقت. طبعاً، بدون زراعة كـل البـذور، ومـن ثـم ملاحظة عـدد الـورود البيضاء لا يمكننا بشكل مؤكد معرفة عدد البذور في صندوق التخزين التي ستنتج بذوراً بيضاء.





الطريقة المنطقية الأخرى هي: نستطيع زراعة جمزء من البلدور، وعلى أساس ألوان الورود الناتجة نحصل على إفادة (تقدير) حول عـدد البلدور ضـمن الـ ١٠ مليون بذرة التي سوف تنتج وروداً بيضاء.

وهذه إجابة غير مؤكدة عن عدد البذور السي مستنتج وروداً بينضاء، لكن يمكن صياغة عبارة احتمالية (درجة الثقة) بالإجابة فيما إذا كان ذلك الجزء من البذور مأخوذاً بطريقة معينة.

هكذا، فالاستدلال الاستقرائي: نأخمذ جنرءاً من الــ ١٠ مليمون بملدة، نزرعها، نلاحظ عدد الورود البيضاء، وعلى أساسها نقمدر عمدد البمذور المتي ستنتج وروداً بيضاء ضمن الـ ١٠ مليون بدرة.

أي من معرفة ألوان جزء نعمم على الكل (١٠ مليون بلرة) وهذا التعميم غير مؤكد. وإذا كان هذا الجزء من الكل مأخوذ بطريقة علمية (محققة لشروط معينة، وهذا ما سنتطرق إليه لاحقاً)، فيمكننا قياس درجة الثقة في التعميم باستخدام نظرية الاحتمالات، وعندتل يطلق على الاستدلال الاستقرائي بالاستدلال الإحصائي = statistical in ference.

يعالج الاستدلال الإحصائي مسألتين هامتين هما:

١. التقدير.

٢. اختبار الفرضيات.





# Random Sample and its Distribution العينة العشوائية وتوزيعها

ليكن ع متغيراً عشوائياً وحيد البعد (one – dimensional) دالــة توزيعــه ق(س) معرفة على ح (فئة الأعداد الحقيقية)، ولترمز لتوزيع ع بشكل عام بــل (ع) تعرف العينة العشوائية بمجم ن مأخوذة من مجتمع دالة توزيعه ق(س) على أنها متغير عشوائي ذي ن بعد س = (س،، ... ، سن) دالة توزيعه:

نلاحظ من هذا التعريف أن العناصر أو المركبات من، ... ، من للعينة العشوائية مستقلة ولكل منها نفس التوزيع، وهو توزيع المجتمع اللذي سحبت منه، أي ق(س). ومن أجل الاختصار نقول عادة أن س عينة عشوائية بحجم ن ق(س) عبارة عن ق(س) (أو من ل (ع))، وبملاحظة أن العينة بحجم ن من ق(س) عبارة عن مثال بسيط للعمليات العشوائية المنتهية، لذا تدعى أحياناً بالعينة العشوائية البسيطة (simple random sample) أو بالمعاينة العشوائية البسيطة (random sampling) وفيما يلي حيث نذكر كلمة عينة نقصد بها عينة عشوائية.

إذا كان المتغير العشوائي ع من النوع المنقطع (المتقطع) دالــة احتمالــه ق(س)، فإن دالة احتمال ودالة توزيع العينة س.

E ov



للمركبة سي، ي = ١، ... ، ن

وإذا كان المتغير ع من النوع المستمر (المتصل)، فإن دالة كثافة ودالة توزيع العينة س.  $\bar{b}_{o}(m) = \bar{b}_{o}(m)$  ق.  $\bar{b}_{o}(m) = \bar{b}_{o}(m)$ 

وهذا بناءً على مفهوم استقلال المتغيرات العشوائية في نظرية الاحتمالات.

ملاحظة: إن تعريفنا للمعاينة العشوائية يقتصر على المعاينة من مجتمع غير منتهي أو منتهي لكن السحب مع الإعادة، لأن المركبات  $m_0$ ,  $m_0$   $m_$ 

# التوزيع التجريبي Experimental Distribution

إن مسألة استدلال التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الملاحظ ع [توزيع المجتمع ل (ع)] أو بعض خصائصه، في حالة كون ل (ع) غير معلوم، تتطلب في حالات عدة تبويب المعطيات الإحصائية التي تقدمها عينة عشوائية ملاحظة س = (س،، ...، س،) من هذا المجتمع.

إذا كان المتغير العشوائي ع من النوع المنقطع وحجم العينة ن صغيراً، فنأخذ القيم المختلفة في العينة الملاحظة س ونرتبها تصاعدياً ومن ثـم نعـين





 $\{(a_i, \frac{\dot{v}_i}{\dot{v}}); c = 1, ..., b\}$ ، أي التوزيع التكراري النسبي لمعطيات العينة المشاهدة، بالتوزيع التجربي للمتغير العشوائي الملاحظ ع الموافق للعينة  $m = (m_1, ..., m_0)$ ، حيث إن  $\sum_{i=1}^{n} \frac{\dot{v}_i}{\dot{v}} = 1$ .

وللتمييز نستخدم أحياناً مصطلح التوزيع النظري لـ ع للدلالة على التوزيع الاحتمالي له (توزيع المجتمع) ويتم عوض التوزيع التجربيي لـ ع جدولياً، كالجدول (١)

جدول (١): التوزيم التجربين للمتغير العشوائي المتقطع ع

46	 16	16	القيم الملاحظة المختلفة م <sub>د</sub>
<u>نه</u> ن	 <u>ن.</u> ن	<u>ن</u> ن	التكرارات النسبية الموافقة <u>ن</u>

أما إذا كنا ندرس متغيراً عشوائياً مستمراً ع، أو كان منقطعاً لكن حجم المعينة ن كبير، فإن تبويب المعطيات الإحصائية يتطلب تقسيم المدى (0) سرر) إلى ك من الفئات الجزئية غير المتقاطعة، وتبسط الحسابات إلى حد كبير إذا كانت الفئات متساوية المدى  $\frac{C}{10}$ ، وهذا ما سوف تعتمده دوماً.





وبعدئذ يتم حساب التكرارات النسبية الموافقة لتلك الفئات نر/ن.
ونشير هنا إلى أن عدد الفئات ك اختياري وعادة لا يقل عن ٥ ولا يزيد عن ٢٠،
ويعتمد هذا الاختيار على طبيعة الظاهرة أو الخاصة المدروسة، بحيث يمكن
اعتبار عناصر الفئة متجانسة بالنسبة للصفة المدروسة ع، ونحصل بالنتيجة على
التوزيع التجربي للمتغير العشوائي الملاحظ ع، كما هو مبين في الجدول (٢).

جدول (٢): التوزيع التجريبي للمتغير العشوائي ع

	_	ري	a Go.	(2)	
	(جـ ١-١) جـ ١٥]		(جـر، جــــــر]	(جسه، جسا]	الفئات (جر-١، جر]
ĺ	ند/ ن		ن,/ن	3/13	التكرار النسبي نر/ن

حیث (جر۔،، جر] الفئة رقم ر
$$= 1، ۲، ...$$
 ك و  $\sum_{i=1}^{n} \frac{\dot{v}_{c}}{\dot{v}}$ 

يعتبر التكرار النسبي  $\dot{v}_0$  ن للحادث  $\dot{v}_0 = (+, -, \cdot)$  متغيراً عشوائياً (لأنه يتغير بشكل عام من عينة ملحوظة لأخرى) بقيمة متوقعة تساوي احتمال هذا الحادث، أى أن:

$$v\left(\frac{\dot{\upsilon}_{c}}{\dot{\upsilon}}\right) = \Im\left(\phi_{c,c} < \Im \le \phi_{c}\right) = \Im\left(\psi_{c}\right) = \Im_{c} \tag{1}$$

لأن المتغير العشوائي ص = نريتبع توزيع ذي الحدين ب (ن، حر)

وكما نعلم من قانون الأعداد الكبيرة [مبرهنة بيرنولي] أنه إذا كبررت التجربة المفروضة ن مرة تحت نفس الشروط، فإن التكرار النسبي لظهور الحادث برينتهي إلى احتمال هذا الحادث، وذلك عندما ن → ∞، أى أن:

وهذا يعني، بملاحظة الجندولين (١) و (٢)، أن السطر الشاني في كليهمــا





يمتوي على القيم التقديرية للاحتمالات حر؛ ر = ١، ٢، ... ، ك. أي أن:  $\frac{\dot{v}_{-}}{\dot{v}_{-}} = 1$  ... ، ك

# دالة التوزيع التجريبي Experimental Distribution function

لنفترض من أجل أي عــدد حقيقــي س فــالمتغير عي معــرف علــى النحــو الآتي:

وعليه ع = تَيْع مِ متغير عشوائي بمثل عدد عناصر العينة الملاحظـة س = (س،، ...، سن) الأصغر من س.

إذا رمزنا بـ قُ (س) $=\frac{3}{0}$ ، فقد عن الدالة قُ (س) بدالة التوزيع التجريعي (عن بدالة المارنية المارن

وللتمييز نسمي دالة التوزيع ق(س) للمتغير العشوائي ع بدالة التوزيع النظري (توزيع المجتمع) وفي حالات عدة حيث لا يوجد التباس نسقط المدليل ن، أي نرمز بـ ق°(س) لدالة التوزيع التجريبي لـ ع.

مثال (١):

إذا كان التوزيع التجريبي للمتغير العشوائي ع معطى بالجدول (٣)، فأوجد دالة التوزيع التجريبي ق\*(س).





جدول (٣): التوزيع التجريبي لـ ع.

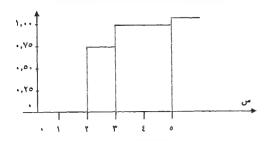
0	٣	Y	القيم الملاحظة لـ U
1,10	٠, ٢٠	۰,۷۵	التكرار

من تعریف دالة التوزیع التجربي  $\bar{v}_{i}(\omega)=\frac{2}{U}$ ، نجد أن:

$$\begin{cases}
Y \ge \omega & \text{i} & \text{i} \\
Y \ge \omega > Y & \text{f} & \text{i} \\
Y \ge \omega > Y & \text{f} & \text{i} \\
Y \ge \omega > Y & \text{f} & \text{i} \\
Y \ge \omega > Y & \text{f} & \text{i} \\
Y \ge \omega & \text{f} & \text{i} \\
Y$$

والتمثيل البياني لدالة التوزيع التجريبي  $v_{o}(\omega)$  ببينه الشكل (١).

# شكل (١)





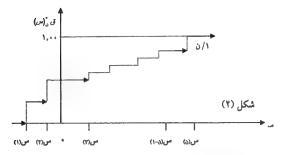


إذا كانت عناصر المتجه س غتلفة فإن دالة التوزيع التجريبي قي (س) تعطى كما يلي:

$$1-\dot{0}: \dots : Y: 1 = 4: ((1+d)^{2m} \times (1+d)^{2m} \times (1+d)^$$

وهذا يعني، في هذه الحالة، أن قيم القفزات متساوية وتساوي ١/ن.

والتمثيل البياني لـ قن (س) بأخذ الشكل (٢).



وفي الحالة العامة يمكن كتابة دالة التوزيع التجربيي قي(س) علمى النحو الآتي:

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\hat{\mathcal{O}}}^{\hat{\mathcal{O}}}(\omega) = \frac{1}{U} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}_{i} \left( \omega - \omega_{(b_{i})} \right). \tag{7}$$





حيث هـ (س) ما هي إلا دالة الواحدية للقفزات (دالة خوفسيد):

وفي العلاقة (٣) يبدو بوضوح ارتباط  $\bar{v}_{0}$  ( $\omega$ ) بالعينة  $v_{0}$ 

إن لدالة التوزيع التجربيي دوراً هاماً وأساسياً في الإحصاء الرياضي، وتكمن أهميتها الخاصة بأنه ازدياد عدد الملاحظات للمتغير العشوائي ع تقـترب دالة التوزيع النظري ق(س). وهذا ما سنراه لاحقاً.

# التمثيل البياني للتوزيعات التجريبية

فلاحظ مما صبق أن التوزيع التجريبي يعتبر طريقة مفيدة لتمثيل المعطيات الإحصائية (معطيات العينة الملاحظة) والتي تمكننا من استدلال بعض النتائج عن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الملاحظ ع عندما يكون مجهولاً بشكل كامل أو جزئي.

هذا وتوجد طرق أخرى لتمثيل المعطيات الإحصائية، وإحدى هذه الطرق تتمثل في بناء المدرج والمضلع للتوزيع التجريبي لـ ع.

ويستخدم مضلع التوزيع التجربي عندما يكون المتغير العشوائي الملاحظ ع مستمراً أو منقطعاً، أما مدرج التوزيع التجربيي فيقتصر استخدامه على حالة





كون المتغير العشوائي الملاحظ ع مستمراً، أو أن العينة العشوائية س ذات حجم كبير (المعطيات الإحصائية مبوية حسب الفئات).

لنوضح كيفية بناء مدرج ومضلع توزيع تجريبي لمتغير عشوائي ع من خلال المثال التالى:

مثال (٢):

لتكن لدينا نتائج دراسة متانة ٢٠٠ نموذج من البيتـون المسلح، كمـا هـي واردة في الجدول التالي:

جدول (٤)

ميجا المتانة (ميجا باسكال)	التكرار النسبي <sup>ن</sup> ر
719	1,10
Y1-Y+	٠,١٣
77-77	٠,٢٨
77-77	•,٣٢
78-77	1,10
37-07	٠,٠٧

المطلوب بناء مدرج ومضلع التوزيع التجريبي المعطى.

لبناء المدرج التكراري لهذا التوزيع التجريبي نرسم محورين متعامدين، يمثل المحور الأفقي الفترات الجزئية والمحور الشاقولي التكرارات النسبية.

ثم نحدد الفترات الجزئية للقيم الملاحظة والتكرارات النسبية الموافقة على الحول الأفقي والشاقولي على الترتيب، وبعد ذلك نقيم مستطيلات على تلـك

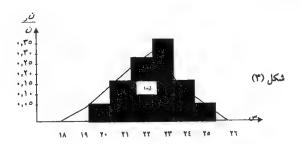
10 ×



الفترات الجزئية بارتفاعات تساوي التكرارات الموافقة، فنحصل بالنتيجة على المدرج التكراري المبين بالشكل (٣).

لرسم منضلع التوزيع التجريبي، نحدد متنصفات الأضلاع العليا للمستطيلات المبينة على الشكل (٣) ثم نصل على الترتيب بخطوط مستقيمة فنحصل على المطلوب.

ولإغلاق المضلع نضيف فئة ميل الفئة الأولى وأخرى بعـــد الفئــة الأخــيرة مجيث يكون التكرار النسبي لكل منها صفراً، فنحصل علــى المــضلع المــين علــى الشكل (٣).



يستخدم مدرج ومضلع التوزيع التجريبي لاستدلال نوع نموذج التوزيع لـ غ. فمثلاً، النموذج الطبيعي العام، له لذا يكن افتراض أن نوع توزيع المتغير العشوائي الملاحظ عُ هو طبيعي، هكذا، يمكن اعتبار الشكل البياني للتوزيع التجريبي لمتغير عشوائي عُ كمناظر إحصائي لشكل التوزيع التجريبي لمتغير عشوائي عُ كمناظر إحصائي لشكل التوزيع النظري له.





# الإحصاء وعزوم العينة Statistic and Sample Moment

إن تشكيل العينة العشوائية ليس هدفاً بحد ذاته، بل الهدف هو الوصول إلى استدلالات حول المجتمع الذي سحبت منه، وهذه الاستدلالات قد تكون حـول توزيع المجتمع أو حول بعض أو كل عميزاته العددية (معالمه).

لهماذا في نظرية المعاينة لا نكتفي بمعرفة التوزيع التجربيي أو التوزيع الاحتمالي للعينة العشوائية، بل نهتم بمعرفة دالة أو أكثر في المتغيرات العشوائية المكونة للعينة، حيث تستخدم للقيام باستدلالات حول معالم المجتمع. ومن أهم للك الدوال ما تدعى بعنووم العينة (Sample moments) سنعرف أولاً الإحصاء أو الإحصاءة والإحصاءة الإحصاء أو الإحصاءة والإحصاءة المحتمدة ال

### تمريف: الإحصاء Statistic

إذا كانت  $m = (m_1, ..., m_6)$  عينة عشوائية من التوزيع ل (ع)، فإن أي دالة في العينة فقط  $m = m_6$  أي دالة في العينة فقط  $m = m_6$  أن يدعى أحصاء.

نلاحظ من هذا التعريف أن الإحصاء ت = ت (س) لا مجتوي على أي معلمة مجهولة، كما أنه يعتبر متغيراً عشوائياً لأن قيمته، بشكل عام، تتغير من عينة ملاحظة لأخرى، وبالتالي له توزيع احتمالي يدعى بتوزيع المعاينة (sampling distribution) للإحصاء ت.

فمثلاً، إذا كانت  $m = (m_1, \dots, m_6)$  عينة عشوائية من التوزيع  $b(3) \in \mathcal{C}^{(6)}$  عيث  $m_1 = m_2 \in \mathcal{C}^{(6)}$  عيد  $m_2 \in \mathcal{C}^{(6)}$  علم تين مجهولتين، فإن الدالـة  $m_2 = m_1$ 





وكذلك الدالة بيم به إلى الست إحصاء، (أن كليهما ليس دالة في العينة فقط، بل يحويان معلمة مجهولة)، لكن:

$$\sum_{i}^{\omega} w_{ij} \cdot \frac{w_{i} + w_{y}}{2} e \sum_{i}^{\omega} e_{x} w_{ij} \left[ -\cos \theta \right].$$

إحدى المسائل الأساسية في الإحصاء هي إيجاد الإحصاءات المناسبة لتقدير معالم الجتمع.

سنتعرف فيما يلي ونناقش بعض الإحصاءات العامة وهي عزوم العينة.

### تمريف: عزوم العينة Sample moments

لتكن  $m = (m_1, \dots, m_6)$  عينة عشوائية من توزيع المتغير العشوائي الملاحظ  $\ddot{3}$  ولنرمز له بـ ق(m)، عندئذ فالعزم الابتدائي (حـول  $^{\circ}$ ) للعينـة m من المرتبة ر نرمز له بـ  $(m_1, m_2, m_3)$  ويعرف كالآتي:

وكحالة خاصة، عندما ر= 1، نحصل على متوسط العينة، ويرمز له عـادة  $\overline{u}$  بـ  $\overline{u}$  أو  $\overline{u}$  ، أي أن:

$$|_{c}(\omega)| = \overline{\omega} = \frac{1}{\dot{\upsilon}} \sum_{v=1}^{\dot{\upsilon}} \omega_{v}. \tag{7}$$

وبشكل مشابه، العزم المركزي (حول  $\overline{u}$ ) للعينة من المرتبة ر، نرمز لـه بـــ مرu





وكحالة خاصة، عندما ر = ٢، نحصل على تباين العينة، ويرمز له عادة بـــ

$$A_{\gamma}(kU) = U^{\gamma} = \frac{1}{U} \sum_{ij=1}^{N} (kU_{ij} - kU)^{\gamma}......(3)$$

وكما نعلم من نظرية الاحتمالات، إذا رمزنا بـ  $\alpha_c$  و  $M_c$  للعزم الابتدائي والمركزي من المرتبة ر للمتغير العشوائي  $ilde{3}$  (العزوم النظرية) على الترتيب، فإن:

$$\alpha_c = e e^{-c}$$
 $\epsilon = 1, \gamma, \ldots$ 

وأن هناك علاقة بينهما وهي:

$$M_{c} = \sum_{i=0}^{c} (-i)^{i} \Delta M_{c}$$

وأن العلاقة (٢) موجودة أيضاً بـين العـزوم الابتدائيـة والعـزوم المركزيـة للعـنة:

$$M_{c} = \sum_{i=1}^{n} (-i)^{-1} + c_{i}^{0} = \frac{1}{1 - i} \cdot \frac{1}{1 - i}$$

وبإعطاء ر = ٢، ٣، ٤ نجد: ل ٢ = ١٠ -س ، مر = ١٠ - ٢س ١٠ + ٢س

$$q_1 = q_1 - 2 \sqrt{q_1} + 7 |_{y} \sqrt{q_2} - 7 \sqrt{q_2}$$
 (A)





## متوسط وتباين متوسط العينة

#### Mean and Variance of Sample Mean

نفترض س =  $(m_1, ..., m_6)$  عينة عشوائية من توزيع ق(m) بمتوسط  $^{\text{T}}$  وتباين  $^{\text{T}}$  ، ونريد تعيين القيمة المتوقعة والتباين لمتوسط العينة  $\overline{m}$  .

لدينا حسب التعريف (العلاقة (٢)):

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{6} w_{ij} = \frac{1}{10} (w_{ij} + ... + w_{ij})$$

وبأخذ القيمة المتوقعة للطرفين، نجد:

$$(v_{ij} = \frac{1}{i}(v_{ij} + ... + v_{ij})$$

لكن س،، ... ، سن متغيرات عشوائية مستقلة ولكل منها التوزيع ق(س)، إذن:

وبالتالي:

ايجاد تباين *س*:

$$^{\prime}$$
 (M –  $^{\prime}$  )  $^{\prime}$  =  $^{\prime}$  ( $^{\prime}$  –  $^{\prime}$  )  $^{\prime}$  =  $^{\prime}$  ( $^{\prime}$  –  $^{\prime}$  )  $^{\prime}$ 

$$e^{-\widetilde{U}-M=\frac{1}{\widetilde{U}}\sum_{i=1}^{\widetilde{U}}(U_{i,i}-\mu)}$$

فإن تباین 
$$\overline{\psi} = e \left[ \frac{1}{\psi} \sum_{i=1}^{\omega} (w_i - M) \right]^T$$



$$= \frac{1}{\omega^{2}} \sum_{\nu=1}^{\omega} e\left(\omega_{\nu} - M\right)^{2} + \frac{1}{\omega^{2}} \sum_{\nu \neq i} e\left[\left(\omega_{\nu} - M\right)\left(\omega_{i} - M\right)\right]$$

لكن حسب تعريف العينة العشوائية، فالمتغيرات سي؛ ي = ١، ٢٠... ، ن ولها نفس التوزيع، إذن:

$$0 : \dots : 1 = g : {^{\mathsf{Y}}} \sigma = {^{\mathsf{Y}}} (M - \omega)$$

$$(m) \dots + \sum_{j=1}^{n} (m_j - m_j)(m_j - m_j) = 0$$

وبالتعويض في (٢)، نجد:

### متوسط وتباين تباين العينة

### Mean and variance of sample variance

لنتأمل الآن تباين العينة، المعرف بالعلاقة (٤):

$$\begin{split} & \mathbf{a}^{-\mathbf{r}} = \frac{f}{\dot{\mathbf{c}}} \sum_{\mathbf{v}=1}^{d} \left( \mathbf{v}_{\mathbf{v}_{\mathbf{v}}} - \overline{\mathbf{v}_{\mathbf{v}}} \right)^{-\mathbf{r}} & = -\frac{f}{\dot{\mathbf{c}}} \sum_{\mathbf{v}=2}^{d} \left[ \left( \mathbf{v}_{\mathbf{v}_{\mathbf{v}}} - \mathbf{M} \right) \frac{f}{\dot{\mathbf{c}}} \sum_{\mathbf{c}=2}^{d} \left( \mathbf{v}_{\mathbf{v}_{\mathbf{c}}} - \mathbf{M} \right) \right]^{-\mathbf{r}} \\ & = \frac{f}{\dot{\mathbf{c}}} \sum_{\mathbf{v}=2}^{d} \left\{ \left( \mathbf{v}_{\mathbf{v}_{\mathbf{v}}} - \mathbf{M} \right)^{-\mathbf{r}} - \frac{f}{\dot{\mathbf{c}}} \left( \mathbf{v}_{\mathbf{v}_{\mathbf{v}}} - \mathbf{M} \right) \right]^{-\mathbf{r}} \right\} \end{split}$$

$$=\frac{\ell}{\dot{\upsilon}}\sum_{b=1}^{\dot{\upsilon}}\left(\imath\upsilon_{\upsilon_{b}}-M\right)^{-\gamma}-\frac{\gamma}{\dot{\upsilon}}\left[\sum_{c=1}^{\dot{\upsilon}}\left(\imath\upsilon_{c}-M\right)\right]^{\gamma}+\frac{\ell}{\dot{\upsilon}}\left[\sum_{c=1}^{\dot{\upsilon}}\left(\imath\upsilon_{c}-M\right)^{-\gamma}\right]$$





$$\begin{split} &=\frac{1}{\dot{U}}\sum_{i,j=1}^{N}\left(i\omega_{i}-M\right)^{-1}\frac{1}{\dot{U}^{-1}}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(i\omega_{i}-M\right)^{-1}\right]^{2}\\ &=\frac{1}{\dot{U}}\sum_{i,j=1}^{N}\left(i\omega_{ij}-M\right)^{-1}-\frac{1}{\dot{U}^{-1}}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(i\omega_{i}-M\right)^{-1}+\sum_{i,j\neq i}\left(i\omega_{ij}-M\right)\left(i\omega_{i}-M\right)\right] \end{split}$$

$$=\frac{\dot{\upsilon}-\ell}{\dot{\upsilon}}\sum_{\nu=\ell}^{\dot{\upsilon}}\left(\iota\upsilon_{\nu}-M\right)^{-\gamma}-\frac{\ell}{\dot{\upsilon}}\sum_{\nu}^{\dot{\upsilon}}\left(\iota\upsilon_{\nu}-M\right)\left(\iota\upsilon_{\nu}-M\right)$$

بأخذ القيمة المتوقعة والاستفادة من (٣)، نجد:

إيجاد تباين م":

کما نعلم: تباین 
$$a^{Y} = ea^{3} - (ea^{Y})^{Y}$$

ولحساب وم $^{\rm Y}$  نضع ص $_{\rm Q}=m_{\rm Q}-M$  في عبارة م $^{\rm Y}$  ثم نربعها، فنجد:

$$a^{\gamma} = \frac{\dot{U} - 1}{\dot{U}^{\gamma}} \sum_{y=1}^{U} a U_{y}^{\gamma} - \frac{1}{\dot{U}^{\gamma}} \sum_{y=0}^{U} a U_{y}^{\gamma} a U_{c}$$

$$\begin{split} & \text{A}^{\, i} = \frac{(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})^{\, \prime}}{\dot{\textbf{b}}^{\, i}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} & \text{av}_{\, \psi} \\ \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \\ \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \\ \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} - \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \\ \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \\ \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \\ \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \\ \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \\ \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \\ \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \\ \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} \end{pmatrix}^{\, \prime} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} \end{pmatrix}^{\, \prime} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} \end{pmatrix}^{\, \prime} \end{pmatrix}^{\, \prime} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} \end{pmatrix}^{\, \prime} \end{pmatrix}^{\, \prime} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \end{pmatrix}^{\, \prime} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\textbf{b}} \end{pmatrix}^{\, \prime} + \frac{\textbf{f}(\dot{\textbf{b}} - \textbf{f})}{\dot{\textbf{b}}^{\, \prime}} \end{pmatrix}^{\, \prime} \end{pmatrix}^{\,$$

فبأخذ توقع م ُ نجد:

$$e_{3}^{i} = \frac{(\dot{u} - \dot{t})^{T}}{\dot{u}^{2}} \sum_{i=1}^{n} \omega_{i}^{T} e^{\alpha \dot{u}_{i}^{T}} + \frac{(\dot{u} - \dot{t})^{T}}{\dot{u}^{2}} \sum_{i=1}^{n} e^{\alpha \dot{u}_{i}^{T}} e^{\alpha \dot{u}_{i}^{$$



$$_{\tau}^{\tau}M(1-\omega)\frac{\Upsilon+\frac{\Upsilon}{2}(1-\omega)}{\tau}+{}_{t}M\frac{\frac{\Upsilon}{2}(1-\omega)}{\tau}=$$

وبالتالي: تباين م<sup>‡</sup> = وم<sup>‡</sup> -- (وم<sup>٢</sup>)٢

$$=\frac{\left(\dot{\wp}-\ell\right)^{\frac{1}{2}}}{\dot{\wp}^{\frac{1}{2}}}M_{1}+\frac{\left(\dot{\wp}-\ell\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}}{\dot{\wp}^{\frac{1}{2}}}\left(\dot{\wp}-\ell\right)M_{2}^{\frac{1}{2}}-\frac{\left(\dot{\wp}-\ell\right)^{\frac{1}{2}}}{\dot{\wp}^{\frac{1}{2}}}M_{2}^{\frac{1}{2}}.....(7)$$

$$^{\mathsf{v}}\sigma = {}_{\mathsf{v}}\mathsf{M}^{\mathsf{f}}\left({}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{v}}\mathsf{M}\frac{{}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{v}}-\dot{\upsilon}}{1-\dot{\upsilon}}-{}_{\mathsf{t}}\mathsf{M}\right)\frac{{}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{v}}\left(1-\dot{\upsilon}\right)}{{}_{\mathsf{v}}\dot{\upsilon}} =$$

يمكن تلخيص ما سبق على النحو الآتي:

إذا كانىت س = (س،، ، س،) عينة من توزيع ق(س) بمتوسط Μ وتباين σ<sup>۲</sup>، فإن متوسط وتباين متوسط العينة س هما:

$$\frac{r_{\sigma}}{\dot{v}} = \overline{w}$$
 بباین  $w = \overline{w}$ 

بالإضافة إلى ذلك، إذا كان العزم المركزي من المرتبة الرابعة لتوزيع المجتمع منتهي، عندثلز تباين العينة م<sup>٧</sup> له متوسط وتباين هما:

$$^{7}\sigma\frac{1-\dot{0}}{\dot{0}}=\frac{\dot{0}-1}{\dot{0}}$$

$$(\sigma^{\frac{r-\dot{\upsilon}}{1-\dot{\upsilon}}} - M)^{\frac{r}{1-\dot{\upsilon}}} = \sigma^{\frac{r-\dot{\upsilon}}{1-\dot{\upsilon}}}$$
 "باین م

ملاحظة: يستخدم عادة في التطبيقات الإحصائية تباين العينة المعدل م\*٠.

$$(7)$$
.... $(3)$ 





## وبالتالي:

$$e_{A}^{\gamma} = e\left(\frac{\dot{\mathbf{U}}}{\dot{\mathbf{U}}-1}^{A} \gamma\right) = \frac{\dot{\mathbf{U}}}{\dot{\mathbf{U}}-1} e_{A}^{\gamma} = \nabla^{\gamma}.$$
 (3)

تباین م
$$^{\bullet\gamma}$$
 = تباین  $(\frac{\dot{\omega}}{\omega})$   $= (\frac{\dot{\omega}}{\omega})^{\gamma}$  تباین م $^{\gamma}$ 

$$. ({}^{\tau} \sigma \frac{\tau - \dot{\upsilon}}{\dot{\upsilon}} - {}_{\dot{\upsilon}} M) \frac{1}{\dot{\upsilon}}$$

## توزیعات الماینة لجموع ومتوسط عینة

### Sampling Distributions of sample Sun and Mean

سنحتاج في موضوعات قادمة لمعرفة توزيع مجموع ومتوسط عينة عشوائية، ولإيجاد ذلك هناك طريقتان سنتطرق إلها في الفقرتين التاليتين.

## طريقة التكرار:

لدراسة طريقة التكرار لإيجاد توزيع مجموع ومتوسط عينة، وللتبسيط نفترض أولاً أن العينة بحجم ن =  $\Upsilon$ ، إذا رمزنا ب $_{\Upsilon}$  بالدالة توزيع المجموع  $\check{\Xi}$  =  $_{\Upsilon}$  +  $_{\Upsilon}$  ، فإن:





حیث إن د =  $\{(m_1, m_7) \in \sigma^7, m_1 + m_7 < 3\}$ ، وبما أن  $m_1$ ، متغیرین عشوائیین مستقلین، یمکننا کتابة:

$$=\sum_{i} \mathcal{L}(\mathcal{E}(\omega_{i}),\mathcal{E}(\omega_{i})) = \int_{\omega_{i}}^{\omega_{i}} \left[ \mathcal{L}(\mathcal{E}(\omega_{i}),\mathcal{E}(\omega_{i})) \right] \mathcal{L}(\omega_{i})$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dot{b}(g-\omega_{1})\omega(\omega_{1})\omega(\omega_{2})$$

ويمكن تعميم ذلك على مجموع عينة حجمها ن>٢ فنجد:

$$(\gamma) \dots (\gamma_{r-0} \cup \gamma_{r-0} \cup \gamma_{r-0}) \cup (\gamma_{r-0} \cup \gamma_{r-0}) \cup (\gamma_{$$

وإذا رمزنا بـ مر $(\overline{\omega})$  لدائة توزيع متوسط العينة  $\overline{\omega}$ ، فإن: مر $(\overline{\omega})=g_c(\overline{\omega})$ 

مبرهنة: إذا كانت  $m = (m_1, ..., m_7)$  عينة عشوائية من توزيع ق $(m^2)$ ، فإن الدالة ق $(m^2)$ ، وكانت  $\Phi$  $(m^2)$  الدالة المميزة لجموع العينة  $\tilde{A} = m_1 + ... + m_6$ :

(Y) ......
$${}^{\circ}[(\Theta^{i} \mathcal{L})\varphi] = (\Theta^{i} \mathcal{L})_{\varepsilon} \varphi$$

والدالة المميزة لمتوسط العينة س:

(A) ..... 
$${}^{\circ} \left[ (\Theta^{\circ} \stackrel{\iota}{\cup}) \varphi \right] = (\Theta^{\circ} \stackrel{\iota}{\cup})_{-} \varphi$$

مبرهنة: بفرض س = (س،، ...، سن) عينة عشوائية من توزيع ق(س؛  $\Phi$ ) دالته الميزة  $\Phi$ (ت،  $\Theta$ ). عندئذ إذا كان:





 $(_{\Theta} \dot{\omega}^{\dagger} \dot{\omega})_{t} \varphi = \dot{\omega} [(\Theta^{\dagger} \dot{\omega}) \varphi]$ 

فإن توزيع مجموع العينة  $\check{U}$  ومتوسط العينة  $\overline{u}$  هـو مـن الـشكل ق $(\check{V})$ ؛  $\underline{v}$  ن $\Theta$ ) على الترتيب.

مبرهنة: إذا كان العزم الابتدائي من المرتبة ر للمتغير العشوائي Ŭ موجوداً، فإن:

$$(\mathring{\omega})(\bullet) = \alpha \frac{\mathring{\omega}(\mathring{\omega}_{\varphi})}{\mathring{\omega}_{\downarrow}} \frac{\mathring{\omega}}{\mathring{\omega}_{\downarrow}} + 1 = (\mathring{\omega})$$

حيث إن:

$$(\cdot) = \frac{(\cdot) (\cdot)}{(\cdot) (\cdot)} |_{\infty \to \infty}$$

توزيعات الماينة لمجموع ومتوسط عينة في بعض الحالات الخاصة

يمكننا الآن باستخدام الدالة المميزة وبعض خواصها الأساسية معرفة توزيع المعاينة لمجموع ومتوسط عينة في بعض الحالات الخاصة والهامة، التي سنحتاجها في فصول لاحقة.

۱- إذا كانت العينة العشوائية  $m = (m_1, \dots, m_0)$  من توزيع بيرنـولي p(1, 0) فإن توزيع المعاينة للمجموع p(1, 0) هو توزيع ذي الحدين p(1, 0) الدالة المميزة للتوزيع p(1, 0) هي:

وحسب المبرهنة (٣) [العلاقة (٧)]، فإن الدالة المميزة لـ ع $=\sum_{i=1}^{n} w_{i}$ :





"[", AΘ+(Θ-1)]=("), φ

وهذه ما هي إلا الدالة المميزة للتوزيع ب(ن، ۞)، أي أن توزيع غٌ هو ب(ن، ۞).

وحسب المبرهنة (٣) [العلاقة (٨)] فالدالة المميزة لـ س هي:

وهذه أيضاً الدالة المميزة لنموذج ذي الحدين ب(ن، @)، أي أن توزيع المعاينة لـ س هو توزيع ذي الحدين ب(ن، @).

Y- إذا كانت  $m=(m_1,\dots,m_6)$  عينة عشوائية من توزيع بواسون  $\Pi_{(6)}$ .

إن الدالة الميزة للنموذج:

 $\Pi_{(\Theta)}$   $\mathbf{A}_{\omega}$ :  $\varphi$ ( $\mathbf{\hat{\omega}}$ :  $\mathbf{\hat{\varphi}}$ )= $\mathbf{A}_{\omega}$ 

ومنها حسب المبرهنة (٣) [العلاقة (٧)] فالدالة المميزة لـ عُ هي:

وهذه ما هي إلا الدالة المميزة لنموذج بواسون  $\Pi_{\Theta^{(0)}}$ ، ومـن ثـم توزيع المعاينة لـ  $\overline{w}$  هو أيضاً نموذج بواسون بمتوسط ن $\overline{w}$ .

۳- إذا كانت س = (س، ، ، ، ، سن) عينة عشوائية من نموذج طبيعي عام





 $\dot{\upsilon}^{(t)}(\Theta, \circ \Theta, \circ)$ ، فـــإن توزيـــع المعاينــة لــــ  $\dot{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij}$  هـــو  $\dot{\upsilon}(\Theta, \circ \Theta, \circ)$  وتوزيم المعاينة لـــ  $\overline{\upsilon}$  يكون  $\dot{\upsilon}^{(t)}(\Theta, \circ \Theta, \circ)$ .

إن الدالة المميزة للتوزيع  $\dot{\upsilon}^{(i)}\left(\Theta, \cdot\Theta^{7}\right)$  هي:  $\phi(\ddot{\upsilon}:\Theta)=\Delta^{v_{\alpha}, \dot{\omega}, \frac{1}{2}\Theta^{7}, \dot{\omega}^{7}}$   $\Theta=\left(\Theta, \circ\Theta^{7}\right)$ .

ومن ثم فالدالة الميزة لـ ص هي:

وهذه الأخيرة ما هي إلا الدالة المميزة للنموذج ن (١ (۞, ٠۞;)، ومــن ثــم فهو توزيع المعاينة غ.

وللحصول على الدالة المميزة لـ  $\overline{v}$  نستبدل ت بـ  $\frac{r}{v}$  في  $\varphi_{s}$  (ت؛  $\Theta$ ):

$$() \Upsilon) \dots \qquad \Delta = \left(\Theta : \frac{\omega}{\dot{\omega}}\right)_{\xi} \varphi = \left($$

وهذه الدالة المعيزة للنصوذج ن (((@, ٠@, / ن)، أي أن توزيع المعاينة أس هو من الشكل ن (((@, ٠@, / ن).

 $\dot{\sigma}^{(1)}\left(M_{1}\sum\right)_{?}M=\left(M_{1},\ldots,M_{m}\right)_{*}\sum\left|\left|\alpha_{2}\left(M_{1}\right)_{*}\right|_{?}M=\left(M_{1},\ldots,M_{m}\right)_{*}\right|$ 

فإن توزيع المعاينة لمتجه المجاميع ع  $=\sum_{j=1}^{\infty} a_{j,j}$  ،  $j=1,2,\ldots$  ، ك ؟

(ص،، .... ، ص٤) هو التوزيع الطبيعي ن(١١ (ن٣، ن٤) وتوزيع المعاينــة لمتجــه





المتوسطات  $\dot{v}^{(1)}(M)$  يكون  $(m_1, \dots, m_6)$  و  $\frac{1}{v}$  سنر  $\frac{1}{\dot{v}}$  سنر  $\frac{1}{\dot{v}}$  المتوسطات  $\dot{v}^{(1)}$ 

الإثبات هنا، مشابه للحالة (٣)، ولذا نترك ذلك للقارئ على سبيل المثال.

0 – إذا كانـت  $(m_1, \dots, m_n)$  حـين عـشوائية مـن توزيـع  $\Gamma(\alpha, 1)$ ، فـإن توزيع المعاينة لـ  $2=\sum\limits_{j=1}^n m_j$  هـو توزيع جاما  $\Gamma(i_0, 1)$ .

الدالة المميزة لنموذج  $\Gamma(\alpha,\alpha)$  هي:  $\phi(m,\alpha)=(1-2,m)^{-\alpha}$  ومن ثم فالدالة المميزة لـ ع هي:

(18) (ت؛  $\alpha$ ) = (1-2) ت(2-1)

وهي الدالة المميزة لتوزيع  $\Gamma(\dot{v}_0)$  )، وللحصول على الدالة المميزة لتوسط المعادلة  $\overline{v}$ ، فنجد:

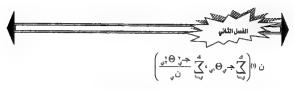
 $(10) \dots \varphi^{-1}(-1) = (\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}) = (\alpha \cdot \frac{1}) = (\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}) = (\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}) = (\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}) = (\alpha \cdot \frac{1}{\alpha$ 

وهي عبارة عن الدالة المميزة لتوزيع جاما  $\Gamma(\alpha)$ ، ١/ن)

 $T-\{i$  کانت (س۱۱، ....، سر۱۵) ، ...، (سB۱، ... سB1 عبارة عن B2 عبارة عن B3 عبارة مين التوزيعية مين (اB1، B2) ، ... B3 عبارة مين B4 عبارة مين B5 عبارة مين B6 عبارة مين B6 عبارة مين B7 عبارة مين B7 مين B7 مين B7 مين B7 مين B8 عبارة مين B8 عبارة مين B8 عبارة مين B9 عبارة B9 عبا

ص= جـ الطبيعي: ص= جـ الطبيعي:





باستخدام الدوال الميزة نحصل على المطلوب مباشرة.

نلاحظ، بوضع جـ، = ١، جــ، = ١٠، جــ، = ... = جـــه = ٠٠ نحـصل على النتيجة التالية:

توزیع المعاینة للفرق س-س-بین متوسطی عینتین مستقلتین (س،۱۲ ....، س<sub>۲۵</sub>۲)، (س،۱۱ ....، س<sub>۱۵</sub>۱۱) مأخوذتین من توزیعین طبیعیین.

 $\dot{\upsilon}^{(1)}(\Theta_{\gamma\gamma}\Theta_{\gamma\gamma}^{\gamma})$ و  $\dot{\upsilon}^{(1)}(\Theta_{\gamma\gamma}\Theta_{\gamma\gamma}^{\gamma})$ على الترتيب هو التوزيع الطبيعي:

$$\left(\frac{1}{1}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{1}\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\frac{1}{1}\Theta - \frac{1}{1}\Theta\right) =$$

## توزيعات المعاينة لصيخ تربيعية معينة في عينات من توزيع طبيعي

بمثنا في الفقرة السابقة (٣) توزيعات المعاينة الأساسية لمجاميع ومتوسطات عينات عشوائية، وبشكل خاص مجاميع ومتوسطات عينات عشوائية (صيغ خطية في عناصر العينة) من توزيعات طبيعية (الحالات ٣، ٤، ٦)، سنعالج في هذا البند توزيعات المعاينة لمجموع مربعات (صيغ تربيعية) في عناصر المعينة العشوائية كالتباين وصيغ تربيعية أخرى للعينات من توزيع طبيعي وحيد البعد.

سنعرض في البداية بعض التعاريف والمبرهنات الضرورية لدراسة الـصيغ التربيعية في متغرات عشوائية طبيعية وتوزيعات المعاينة لها.





# الصيغ الخطية والتربيعية في متغيرات عشوائية طبيعية

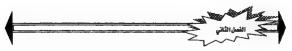
### Linear A quadratic Forms in Normal Random Variables

نفسسترض أن س =  $(m_1, \dots, m_6)$  مسستغيراً عسسسوائياً ذا ن بعد، و $|-||f_{\infty}||_{1}$  مصفوفة حقيقية متناظرة من المرتبة ن × ن. يدعى المقدار ج =  $m^{-1}$  أ س بالشكل التربيعي في المتغيرات  $m_{2}$ ?  $m_{2}$  =  $m^{-1}$  أ من بالشكل التربيعي، وإذا كانت المصفوفة أ محددة موجبة تدعى أ يمصفوفة أ محددة موجبة ( $||f|| + m_1)$ )، فإن الشكل التربيعي جر محدد موجب، نلاحظ أن:

 $= \omega^{2} |_{\mathbf{w}_{0}} = \sum_{j=1}^{c} \sum_{\ell=\ell}^{c} \{_{\mathbf{w}_{\ell}} \mathbf{w}_{0} |_{\mathbf{w}_{0}} \}$ 

# وس<sup>ت</sup> منقول س.





الإثبات: بما أن ﴿ مصفوفة حقيقة متناظرة، فهي قابلة التقاطر تعامدياً orthogonal) أي يمكن إيجاد مصفوفة متعامدة ( orthogonally diagonalizable) ( orthogonally diagonalizable) ( orthogonally diagonalizable) ( orthogonally ( orthogonally ) ( orthogonally ( orthogonally ) ( orthogona

يفهم في لغة المصفوفات المتجه كمصفوفة عمود ل $^{\mathrm{u}}$  أو ل $^{\mathrm{u}}$  منقول المصفوفة ل.

لتكن ر رتبة المصفوفة أ (درجة أ) و ،،،،،،،،،، الرالقيم الذاتية لها المختلفة عن الصفر، وبما أن ل أله الدين المساود والمساود والما أن المساود والمساود والمسا

$$l = \bigcup_{c} \bigcup_{c} = \sum_{b=1}^{c} A_{b} \bigcup_{b} \bigcup_{b} \cdots$$
 (Y)

وحسب الفرض:

$$\psi \stackrel{!}{=} \stackrel{\bullet}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^{l} K_{ij} (\psi \downarrow_{ij}) \downarrow_{ij}^{\omega} = \bullet$$





لناخمة الآن المتجمه العسشوامي (ت، س، تم، ل، س، س، ، ل, وسم)، يخسضع همذا المتجمه للتوزيع الطبيعي ذي م + ر بعد، لأن مركباته (منتغيرات عشوائية عبارة عن أشكال خطية في المتجه الطبيعي س.

ويمكن بناءً على العلاقة (٢) كتابة:

$$S = W^{\omega_1} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} (\omega^{\omega_1}) (U_{ij}^{\omega_2} \omega) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} (U_{ij}^{\omega_2} \omega)^{\gamma}$$
....(3)

وبالتالي، نصل إلى المطلوب، إذا أمكن إثبات أن المتغيرات العشوائية ت،، ...، ت،، ل، "س، ...، ل, "س غير مرتبطة، وذلك لأنهــا خاضــعة لتوزيعــات طبيعية، أي يكفي إثبات أن:

$$(\Gamma_{v_0}, \Gamma_{v_0}) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P$$

وهذا يعني أن تي، لنُّس مستقلان.

لإثبات ذلك، لنرمر ب  $+ \frac{\pi}{2}$  ؛  $\frac{\pi}{2}$  = 1، ... ، م أمسطر المصفوفة ب، وحسب العلاقة ( $\frac{\pi}{2}$ ) غد:

$$=e(\mu_{v}^{\omega}wb_{c}^{\omega}w)-e(\mu_{v}^{\omega}w)e(b_{c}^{\omega}w)$$

حيث إن و(بيس)=و(لرس)=٠، لأن توزيع سي هـو ن<sup>(۱)</sup>(٠،١)، وبينار - الأن ر - ١، ... ، ن؛ ب ل ر - ١ [العلاقة (٣]] وهو المطلوب.





لنرى الآن الشكلين التربيعيين:

ج, =س تأس ، ج, =س تبس

حيث كل من أو و ب مصفوفة حقيقية متناظرة من المرتبة ن.

مبرهنة: إذا كان أب = ب أ = ٠، فإن المتغيرين العشوائيين ج١، ج٢ مستقلان.

الإثبات: لنفترض من أجل المصفوفة أ العلاقة (٢) صحيحة. ويمكننا كتابة المصفوفة ب على النحو الآتي:

وحسب الفرض أ  $\nu = 0$  إذن:  $\{ \psi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{K}_{ij} \mathcal{U}_{ij} \cup \mathcal{U}_{ij} \cup \mathcal{U}_{ij} = 0 \}$ 

وبضرب هذه المساواة من اليسار بلك ومن اليمين برع، نجد: لي ع الله ع الله عن اليسار براء ... ، م

وهذا يعني أن المتجهات لن متعامدة مع المتجهات عر، من هنا، كما أشرنا مسابقاً، فـالمتغيرات العـشوائي لن°س و عرّس ضير مرتبطـة، وبمــا أن توزيعهــا المشترك طبيعي فإنها مستقلة. وبالتالى، بما أن:

$$\mathbf{S}_{r} = \sum_{\mathbf{v}=1}^{r} \mathbf{A}_{\mathbf{v}} (\mathbf{b}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} \mathbf{v})^{T}$$
  $\mathbf{S}_{r} = \sum_{\mathbf{v}=1}^{r} \mathbf{A}_{\mathbf{v}} (\mathbf{S}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} \mathbf{v})^{T}$ 

فإن المتغيرين ج١، ج٢ مستقلان.





# \* توزيعات المعاينة لصيغ تربيعية في متغيرات عشوائية طبيعية.

لنرمز بـ ترأ لأثر المصفوفة المربعة أ (مجموع عناصرها القطرية).

مبرهنة: لتكن س = (س، ... ، س، عينة عشوائية من التوزيع ن (۱) المبرهنة:  $\P = \P^{(1)}$  مينة  $\Pi = \P^{(1)}$  مصفوفة  $\Pi = \Pi^{(1)}$  مصفوفة متساوية القوى)، فإن  $\Pi = \Pi^{(1)}$  بال  $\Pi = \Pi^{(1)}$ 

الإثبات: لنفترض من أجل أ العلاقة (٢) صحيحة، عندها من خاصية التناظر ومتساوية القوى نجد أن  $_{7}$ ،  $_{7}$   $_{8}$   $_{7}$   $_{8}$ 

$$5 = \sum_{k=\ell}^{\infty} (l_k^{\omega_k} \omega)^{\gamma}$$

وبما أن المتجهات ل متعامدة ومستقلة، فإن المتغیرات العشوائية  $\mathcal{V}_{u}^{m}$ ،  $\mathcal{V}_{u}$  ،  $\mathcal{V}_{u}$  ، . . . ، ر مستقلة ولكل منها التوزيع الطبيعي  $\mathcal{V}_{u}^{(1)}(\cdot)$  . وبالتالي، بناءً على المبرهنتين (۲) و (۷) لتوزيع كاي  $\mathcal{K}_{u}^{n}$  فإن  $\mathcal{K}_{u}^{n}$  ، وأن:

$$_{0}$$
ترأ =  $_{0}$  ( $_{0}$  ل د) =  $_{0}$  د =  $_{1}$  + ... +  $_{N}$  + ... +  $_{N}$ 

مبرهنــة: إذا كــان المتجـه ص =  $(\omega_0$ ، .... ،  $\omega_0$ ) خاضــعاً للتوزيــع  $\dot{\Sigma}^{(1)}(M)$   $\dot{\Sigma}^{(1)}(M)$  يخضع لتوزيــع  $\dot{\lambda}^{(1)}(M)$  عضفونة التغاير و  $\dot{\lambda}^{(0)}$  مصفونة القيم المتوقعة لــ  $\dot{\omega}_0$ ؛  $\dot{\omega}$  . . . . . . . . . . . . . .

الإثبات: بما أن 🏾 مصفوفة حقيقية ومتناظرة، فهي قابلة للتقاطر. وبالتالي





يمكن إيجاد المصفوفة ل التي تحول المصفوفة  $\Sigma$  إلى تسكل قطىري  $L^{-1}$   $\Sigma$  U=c. وبما أن العناصر القطرية  $\Lambda_{\rm p}$  للمصفوفة c موجبة، فإن المصفوفة  $c^{-1/1}$  عبارة عمن المصفوفة القطرية بالعناصر  $\Lambda_{\rm p}^{\prime\prime}$ . لنبحث الآن عن توزيع المتجه.

يما أن ل(ص) = ن (۱) (M،  $\Sigma$ )، وبأخد ع = ل ص، حيث ل مصفوفة التحويل الخطي، فإن ل(ع) = ن (۱) (ل M، ل  $\Sigma$  ل $^{\circ}$ )، وبالتالي:

لكن ص - M = ل دارع، إذن:

ج=عد ۱۱۲۰ کی تعجید عود وجع ع

وبناءً على المبرهنتين (٦) و(٧) لتوزيع  $\lambda^{Y_1}$ ، نجد:

مبرهنة: إذا كانت  $m = (m_1, \dots, m_0)$  عينة عشوائية من التوزيع  ${}^{(1)}$   ${}^{(2)}$   ${}^{(3)}$  وكان  ${}^{(3)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (i) = \frac{1}{2} \sum$ 

الإثبات: يما أن (حسب الفسرض): ل $(\omega_{ij})$  =ن $(^{7}\sigma_{i}M)^{(1)}$  =ن $(^{7}\sigma_{i}M)^{(1)}$  الإثبات: ي-۱۰۲ ...، ن فإن:





$$\dot{\upsilon} : \dots : \Upsilon : \mathbf{1} = \mathbf{c} : (\mathbf{1} : \mathbf{0})^{(1)} \dot{\upsilon} = \left(\frac{\mathbf{M}_{\sigma} \mathbf{u}}{\sigma} = \mathbf{u}\right) \dot{\upsilon}$$

أي أن ص = (ص، ، .... ، صن) عينة عشوائية من التوزيع ن<sup>(۱)</sup>(٠، ١)، و للاحظ أن:

$$\frac{(\omega)^{\gamma} \rho}{\sigma} = (\omega \rho)^{\gamma} \rho \epsilon \qquad \frac{M - \overline{\omega}}{\sigma} = \overline{\omega} \rho$$

ولإثبات استقلال المتغيرين م (س)، سَ يكفي إثبــات استقلال المــتغيرين م (ص)، سَ .

لناخد مصفوفة السطر  $v = \left[\frac{1}{v}, ..., \frac{1}{v}\right]$  من المرتبة  $1 \times v$ ، عند المصفوفة  $v = \|v, v\|$  من المرتبة  $v = \|v, v\|$ 

نلاح<u>ظ صَّ</u>بُص و ن م (ص) = (ص-ب ص) (ص-ب ص)، وبالتالي يمكننا أن نكتب ن م (ص) = ص اص اص، حيث إن  $| = e_0 - v$  مصفوفة متساوية القوى.

من الواضح أن توزيع  $\overline{\omega} = \frac{\omega - \omega}{1/\sigma}$  هو ن(۱'(۰،۱). وبما أن:

$$\frac{\dot{\upsilon} \cdot \gamma^{\prime}(\upsilon)}{\sigma^{\gamma}} = \frac{1}{\sigma^{\prime}} \sum_{\upsilon=1}^{\dot{\upsilon}} \left( \iota \upsilon_{\upsilon} - \iota \overline{\upsilon} \right)^{-\gamma} = \frac{1}{\sigma^{\gamma}} \sum_{\upsilon=1}^{\dot{\upsilon}} \left[ \left( \iota \upsilon_{\upsilon} - M \right) - \left( \underline{\iota \upsilon_{\upsilon}} - M \right) \right]^{\gamma}$$



$$=\sum_{\nu=1}^{\nu}\left(\frac{\omega_{\nu}-M}{\sigma}\right)^{\nu}-\left(\frac{\omega_{\nu}-M}{\omega_{\nu}-M}\right)^{\nu}$$

وحسب المبرهنتين (٦) و (٧) لتوزيع  $^{1}$  فإن:

$$U = \int_{v_{eff}} \int_{v_{eff}}$$

$$\int_{0}^{\infty} \lambda = \left(\frac{M - \omega}{\omega V / \sigma}\right) ds$$

وبالتالي، بناءً على المبرهنة (٨) لتوزيع  $\chi^{7}$  نجد: ل $\left(\frac{\dot{v} \wedge \gamma'(\omega)}{\dot{v}}\right) = \chi'_{(\omega-1)}$ 

مبرهنة: إذا كانت  $m^* = (m_1, ..., m_6)$  عينة حشوائية من التوزيع  $(\sigma, M)^{(1)})$  وكان  $\sigma^{(1)}$  وكان  $\sigma^{(1)}$ 

$$U_{(i-i)} = \left(\frac{M - \overline{U}}{1 - \overline{U} \cdot \overline{V} \cdot \overline{V}}\right) = 4 \cdot \frac{1}{4}$$

اي أن المتغير العشوائي  $\frac{\overline{M-M}}{a/\sqrt{V}}$  بخشم لتوزيع ت بــ ن - ۱ درجـة

 $\frac{(-1)^{\gamma}}{\gamma \sigma}$  الإثبات: لنفترض أن: ع $=\frac{M-M}{\gamma \sigma}$  ،  $\eta = \frac{(-1)^{\gamma}}{\gamma \sigma}$ 

وعلى ذلك: 
$$\frac{\overline{w-w}}{\sqrt{4\dot{u}-1}} = \frac{\overline{w-w}}{\sqrt{4\dot{u}-1}}$$

$$\sqrt{\frac{v-w}{v-1}} = \frac{M-\overline{w}}{\sqrt{4\dot{u}-1}}$$

$$\sqrt{\frac{v-w}{v-1}} = \frac{M}{\sqrt{4\dot{u}-1}}$$



ویما أن: لوع = 
$$\frac{\dot{v} - \dot{v}}{\ddot{\omega} \dot{v} / \sigma}$$
 =  $\dot{v}$  (۱۵) ، (۱۵) ن (ادر اندر المرتبع) ویما أن: لوع =  $\dot{v} + \dot{v} = \dot{v} + \dot{v} = \dot{v}$ 

إن حسب تعريف توزيع ت، فإن:

$$U_{(k-1)}^{(k-1)} = \sqrt{\frac{1}{(k-1)}} = \sqrt{\frac{1}{(k-1)}}$$

مبرهندة: [ذا كانست س = (س١، ... ، سم) و ص = (ص١، ... ، ص٠) عينستين هشوائيتين مستقلتين من التوزيع ن  $(M^{(N)}, \sigma^{(N)})$ ، وكان  $\sigma^{(N)}$ ،  $\overline{\omega}$  و $\sigma^{(N)}$  وم  $\overline{\omega}$  متوسط وتباين كل منهما على الترتيب فإن المتغير العشوائي:

$$\dot{\mathcal{L}} = \sqrt{\frac{A \cdot \dot{\mathcal{L}} \left(A + \dot{\mathcal{L}} - \Upsilon\right)}{A + \dot{\mathcal{L}}}} \frac{\overline{\dot{\mathcal{L}} - \dot{\mathcal{L}}}}{\sqrt{A \cdot \dot{\mathcal{L}}}} \frac{\overline{\dot{\mathcal{L}}} - \overline{\dot{\mathcal{L}}}}{\sqrt{A \cdot \dot{\mathcal{L}}}} \frac{\overline{\dot{\mathcal{L}}}}{\sqrt{A \cdot \dot{\mathcal{L}}}}} \frac{\overline{\dot{\mathcal{L}}}}{\sqrt{A \cdot \dot{\mathcal{L}}}} \frac{\overline{\dot{\mathcal{L$$

يخضع لتوزيع ت بـ (هـ + ن - ٢) درجة حرية.

الإثبات: يمكن كتابعة المنغير العمشوائي ت على النحو الأتمي:

$$\frac{\frac{\dot{\omega}^{\Delta}}{\dot{\omega} + \Delta} \left[ \sigma / \left( \omega_{-} - \omega_{-} \right) \right] k}{\left( \tau_{-} \dot{\omega} + \Delta \right) / \left( \omega_{-} \right)^{\gamma} \dot{\sigma}^{\Delta} k}$$

حيث إن:

$$\sigma = \frac{-1}{\sigma} = (\overline{\omega} - \overline{\omega}) = (\overline{\omega} - \overline{\omega})$$

$$\lambda = \left(\frac{\left(\omega^{\lambda}\right)^{\gamma} \wedge \omega}{\tau_{\sigma}}\right) \cdot \left(\frac{\left(\omega^{\lambda}\right)^{\gamma} \wedge \omega}{\tau_{\sigma}}\right) \cdot \left(\frac{\left(\omega^{\lambda}\right)^{\gamma} \wedge \omega}{\tau_{\sigma}}\right) \cdot \omega \cdot \omega$$

فحسب الخاصة (٢) لتوزيع ٦٨ نجد:



$$\int_{\Delta_{\tau_{0}}} \int_{\Delta_{\tau_{0}}} \int_{\Delta_{\tau_{0}}}$$

وبسهولة يمكن إثبات أن:

$$(1\omega)^{(1)}\dot{\upsilon} = \left(\frac{\dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}}{\dot{\upsilon} + \dot{\omega}}\right)\frac{\dot{\upsilon} - \dot{\upsilon}}{\sigma}$$

وبالتالي، بناءً على تعريف توزيع ت نجد أن توزيع المتغير العشوائي ت المعرف بالعلاقة (٥) هو م(هـ + ن – ٢)، أي أن:

وبشكل مشابه، يمكن إثبات أن المتغير العشوائي:

$$\overset{(N-\sqrt{M})-(M-\sqrt{M})}{\overset{(N-\sqrt{M})-(M-\sqrt{M})}{\overset{(N-\sqrt{M})-(M-\sqrt{M})}{\overset{(N-\sqrt{M})-(M-\sqrt{M})-(M-\sqrt{M})}{\overset{(N-\sqrt{M})-(M-\sqrt$$

يخضع لتوزيع ت بـ (ه + ن – ٢) درجة حرية، حيث إن س = (س، ...، س,) من التوزيم:

$$({}^{\mathsf{Y}}\sigma_{\mathsf{Y}}M)^{(1)}$$
 و  $\omega = (\omega_{\mathsf{I}}, \ldots, \omega_{\mathsf{G}})$  من التوزیع  $({}^{\mathsf{Y}}\sigma_{\mathsf{Y}}M)^{(1)}$ 

## \* الإحصاءات المرتبة The Order statistics

تلعب نظرية المعاينة للإحصاءات المرتبة دوراً هامـاً في مسائل غتلفة للاستدلال الإحصائي، التي ستتطرق إليها فيما بعد. لذا سنبحث في هـذا البنـد بعض أهم نتائج نظرية المعاينة للإحصاءات المرتبة.





نفترض  $m^* = (m_1, \dots, m_6)$  عينة عشوائية من توزيع مستمر ق  $(m_1, \dots, m_6)$  و  $m_1 = (m_1, \dots, m_6)$  قيمة ملاحظة  $m_1, \dots, m_6$  اللاحظة  $m_1, \dots, m_6$  من ترتيبها تصاعدياً حسب قيمها (من الأصغر إلى الأكبر) ولنرمز لها بس  $m_1, \dots, m_6$  من  $m_6$   $m_6$  m

 $\omega_{(f)} \leq \omega_{(f)} \leq \ldots \leq \omega_{(G)} \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$ 

ولنرمز بـ  $w_{(1)}^{(2)}$  للمتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة  $w_{(2)}^{(3)}$   $= 1 \cdot ... \cdot ... \cdot ...$  v حند أي ملاحظة  $w_{(3)}^{(4)}$   $w_{(4)}^{(4)}$   $w_{(4$ 

(Y) .....(Y) (Y) (Y)

تدعى المتغيرات الجديدة  $v_0^{(2)}: b=1, \ldots, i$  بالإحصاءات المرتبة للعينة، ويدعى المتغير  $v_0^{(2)}: p_0^{(2)}: p_0^{(2)}$ 





# \* التوزيع الاحتمالي الهامشي لإحصاء مرتب

The marginal probability distribution of an Individual Order Statistic

نقدم في هذه الفقرة التوزيعات الاحتمالية الهامشية للإحصاءات المرتبة  $w_{(1)}^{(1)}$ ,  $w_{(2)}^{(1)}$ ) عينة عشوائية من توزيع مستمر  $w_{(2)}^{(1)}$ ,  $w_{(2)}^{($ 

$$(m) = 7(3 < m)$$

وكانت  $ص_{i}=m_{i}^{(r)}$ ،...،  $a_{i}=m_{i}^{(r)}$  الإحصاءات المرتبة للعينة  $a_{i}^{(w)}$  وكانت  $a_{i}=m_{i}^{(w)}$  التوزيع الاحتمالي للإحصاء المرتب  $a_{i}=m_{i}^{(w)}$  يعطى بدالة الكثافة:

$$(7)$$
 ....  $(4) = a(4) = a(4) = \frac{1}{(2-1)!} \frac{1}{(2-2)!} \frac{1}{(2-2)$ 

حسب تعريف دالة الكثافة في نظرية الاحتمالات:

$$\mathbb{A}(\omega) = \inf_{\Delta \omega \to 0} \frac{\mathbb{A}^{-1}(\omega + \Delta \omega) - \mathbb{A}^{-1}(\omega)}{\Delta \omega} = \inf_{\Delta \omega \to 0} \frac{\nabla(\omega \leq \omega) \cdot \langle \omega + \Delta \omega \rangle}{\Delta \omega}$$

حيث هــ(ص) و هــ\*(ص) دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع للمتغير العشوائي  $ص_2$  على الترتيب، إن تحقق الحادث  $\infty \leq \omega_0^* < \omega + \Delta \omega$  يعني أن (y-1) من المركبات  $\omega_0^*$  : y = 1 ، ... ، ن للعنية  $\omega^*$  أقــل مـن  $\omega$  ومركبة واحدة تنتمي للفـترة [ $\omega$ ،  $\omega$ + $\Delta$  $\omega$ ) وأن (i-y) مركبة مـن  $\omega^*$  أكـبر أو تساوي  $\omega$ + $\Delta$  $\omega$ . وباستخدام التوزيع المتعدد الحدود نجد:





 $abla (\omega) = \frac{\omega}{(2-1)!} \frac{|\omega|}{[\varepsilon(\infty)]!} [\varepsilon(\infty)]^{-1} [\varepsilon(\infty) + \Delta(\omega) - \varepsilon(\omega)! - \varepsilon(\omega) - \omega)]^{-1}$ e grāmu, ilde ėsi ala  $\Delta(\omega) = 0$ , in this is actal  $\Delta(\omega) = 0$ .

 $\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta \cos^2(\alpha)}{\Delta \cos^2(\alpha)}}{\Delta \cos^2(\alpha)} = \frac{\frac{i!}{(\nu-\nu)!}\frac{1}{[i(\nu-\nu)]} \left[i(\alpha)\right]^{\nu\nu} \left[i-i(\alpha)\right]^{\nu\nu} \left[i+\frac{1}{2}(\alpha)\right]^{\nu\nu} \left[i+\frac{1}{2}(\alpha)\right] \frac{i}{\Delta \cos^2(\alpha)} = \frac{i}{2}(\alpha)$ 

 $A_{\nu}(\omega) = \frac{1}{(\nu-1)!} \frac{1}{(\nu-2)!} \frac{1}{[\omega(\omega)]^{\nu-1}} [(-\omega(\omega))]^{\nu-1} = 0$ 

بوضع ي=١ في العلاقة (٣) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع  $-\cdot$   $-\cdot$ 

$$(\xi) \dots^{-1} \underbrace{[(-1)]}_{(1-i)} (-1) \underbrace{[(-1)]}_{-1} (-1) \underbrace{[(-1)]}_{-1} (-1)$$

ويوضع ي = ن نحصل على دالة كثافة توزيع  $ص_0 = \omega_{(0)}$ :

وبشكل مشابه نحصل على توزيع بقية الإحصاءات المرتبة.

### مثال (١):

بفرض س' =(س٬ س. عُسنُ) حينة عشوائية من التوزيع المنتظم بر(١،١٠)، أوجد توزيع كل من ص٬ =س٬،، ص. عسر،،

بما أن دالة كثافة ودالة توزيع ٦ (١، ١) هي على الترتيب:



الفصل الثَّاني

$$\begin{vmatrix}
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow
\end{vmatrix} = ((\iota_{i})^{\circ})^{\circ} \tilde{\mathcal{G}}$$

فحسب العلاقة (٣) نجد دالة كثافة توزيع ص عص على

$$1 \ge \omega > 0$$
,  $(\omega - 1)^{1-\alpha} \omega \frac{1}{1(\omega - 1)!} \frac{1}{1(\omega - 1)!} \frac{1}{1(\omega - 1)!} = (\omega - 1)^{\alpha} \omega$ 

#### مثال (٢):

إذا كانت  $w^*=w^*,...,w^*$  عينة عشوائية من توزيع أسي:

$$\dot{\theta}$$
وجد توزیع کل من  $\dot{\theta}$  =  $\dot{\theta}$  و  $\dot{\theta}$ 

بما أن حالة التوزيع الأسي:

فبالتعويض في العلاقة (٣) نجد توزيع ص  $= \omega_{(u)}$ 

$$\cdot < \omega$$
 !  $\frac{1}{1} \frac{\dot{U}}{(UG - \dot{M} - 1)} = \frac{1}{1} \frac{\dot{U}}{(UG - \dot{U})!} = \frac{1}{1} \frac{\dot{U}}$ 



م راص) = ( ن-۲ ( ن-۱ ) هد -۱ م ا سال ۱ - د م ا ا سال ۱ - د م ا

# \* التوزيع الشاترك لإحصائين مرتبين

#### The Joint Distribution of two order statistics

مېرھئة:

إذا كانت س "=(س, مسن "عينة عشوائية من مجتمع دالة كثافته الاحتمالية ق(س) ودالة توزيعه ق (س)، فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للإحصائين المرتبين

 $\omega_{v}=\omega_{(v)}$ 

 $\frac{k!}{(-1)^{n-1}} \frac{k!}{(-1)^{n-1}} \frac{k!}{(-1)!} \frac{k!}{$ 

## الإثبات:

نعلم أن:

$$\frac{(\omega\Delta + \omega )^{2} \omega \geq \omega (\omega\Delta + \omega )^{2} \omega \geq \omega)_{e}}{\omega \Delta \omega \Delta} = (\omega (\omega)_{o})_{o} \Delta$$

وتحقق الحادث ( $\omega \ge \omega_{v}^{<\omega} + \Delta \omega^{\circ} = \omega_{v}^{<\omega} + \Delta \omega^{\circ}$ ) يعني تحقق الحوادث:





ص درس ؛ لى ≤ى ١٠٠٠

g=d: UA+w>" ~ ≥ w

س+ ۵س ≤ ص و حص ؛ ي < ك ≤ ر ١٠٠

ص ≤ من وحص+ ١٥٠١ اك=ر

ص رُ≥ص+ ∆س ٤ ك>ر

نلاحظ أننا أمام ن تكرار مستقل لتجربة مفروضة، فضاء الحوادث الأولية الموافق لها مجزأ إلى خمس حوادث متنافية مثنى مثنى، وهمي المواردة أصلاه، وأن احتمالات هذه الحوادث على الترتيب:

ح، = ق(س)

 $-\gamma = \tilde{\mathfrak{o}}(m+\Delta_m) - \tilde{\mathfrak{o}}(m)$ 

ح۲ = ق(ص) -- ق(س+كس)

ح؛ = ق(ص+∆ص) – ق(ص)

 $_{\sigma_0} = 1 - \tilde{\mathfrak{o}}(\omega + \Delta_{\infty})$ 

ومن ثم احتمال ظهور الحادث الأول (ي-١) مـرة، الحـادث الشاني مـرة واحـدة والحـادث الرابع مـرة واحـدة والحـادث الرابع مـرة واحـدة والحـادث الخامس (ن-ر) مرة ضمن الـ ن تكرار مستقل للتجربة المفروضة يعطى بقـانون التوزيع المتعدد الحدود:

 $2^{(\omega)} \cdot 3 - (\omega + \Delta \omega)^{-1} \cdot 3^{-1} \cdot 3^{-1$ 

 $[0, -1]^{(-\nu)}$   $[0, -1]^{(-\nu)}$   $[0, -1]^{(-\nu)}$   $[0, -1]^{(-\nu)}$ 

بتقسيم الطرفين على كسكص، وأخذ النهاية عندما كص ب٠٠٠٠

Z II



∆س→، نحصل على دالة الكثافة المشتركة هــي (س، ص) المعرفـة بالعلاقـة (٦).

بوضع ي = ١، ر = ن في العلاقة (٦) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للإحصائين المرتبين  $\mathbf{v}_{o}^* = \mathbf{v}_{o}^* = \mathbf{v}_{o}^*$ :

(V)..  $\omega > \omega^{1-1} [(\omega) - \tilde{\omega}(\omega)] [\tilde{\omega}(\omega)] [(\omega) - \tilde{\omega}(\omega)]^{1-1} = \omega < \omega$ and  $\omega = \omega^{1-1} [(\omega) - \tilde{\omega}(\omega)] = \omega^{1-1} [$ 

بفوض س ْ =(س ، س.،س ْ) عينة من التوزيع المنتظم ح (١،١٠)، أوجد التوزيع المشترك للإحصائين ص ، =س (،)، س ﴿ = س (ه)

 $1 \ge \omega \ge 0$  ا  $1 = (\omega)$  عيث أن: ق $(\omega)$ 

٠< س≤١ وبالتعويض في العلاقة (٦)

ق\*(س) = س ؛

وبإعطاء ي = ١، ر = ن لحصل على كثافة التوزيع الاحتمالي لـ (صُرْءُ صُنْ ) لـ (صُرْءُ صُنْ )

 $-1 \le 0$  (س-س) (ن-۱) (ص-س) (۱-۵) (س حس  $-1 \le 0$  (ص-1 ) (ص-1

مثال (٤):

بفرض  $w^*=(w^*,\dots,w^*)$  عينة عشوائية من مجتمع كثافة توزيعه:





 $0 \cdot (m) = \frac{1}{7} \int_{0}^{\infty} A \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1} = (m)^{3}$ 

أوجد التوزيع المشترك الإحصائين ص: =سن، صن =سن

عا أن:

### قحسب العلاقة (٧):

 $a_{o}(w^{1})=\frac{i(i-1)}{i}a_{o}-\frac{i(i-1)}{i}a_$ 

$$\mathsf{A}(\omega_{\ell},\cdot..,\cdot\omega_{\upsilon})=\bigcup_{i=1}^{\ell}\bigcup_{j=1}^{\ell}(\mathsf{d}(\omega_{\upsilon}))$$

### الإثبات:

### نعلم أن:

 $\left\langle \omega_{i} + \omega$ 

وتحقسق الحسادث (ص $_{\sim}$  $_{\sim}$ 





(صي≤ص,<ص,+۵ص,)باحتمسال ق(ص,+۵ص,) – ق(ص,) وحسسب قانون التوزيم المتعدد الحدود:

وبتقسيم الطرفين على 
$$\prod_{y=1}^{\omega} \Delta ص وجعل  $\Delta ص = *$  نجد:$$

$$A(\omega_{v})^{0} = \bigcup_{i=1}^{n} \frac{\partial_{i}(\omega_{v}) - \partial_{i}(\omega_{v}) - \partial_{i}(\omega_{v})}{\partial_{i}(\omega_{v})} = \bigcup_{i=1}^{n} \frac{\partial_{i}(\omega_{v}) - \partial_{i}(\omega_{v})}{\partial_{i}(\omega_{v})}$$

$$A(\omega_{v}) = \bigcup_{i=1}^{n} \partial_{i}(\omega_{v}) - \partial_{i}(\omega_{v}) - \partial_{i}(\omega_{v})$$

$$A(\omega_{v}) = \bigcup_{i=1}^{n} \partial_{i}(\omega_{v}) - \partial_{i}(\omega_{v})$$

وهو المطلوب.

فمثلاً، إذا كانت لدينا معطيات المثال (٤)، نجد:

$$(\omega_{0},...,\omega_{N})=(\frac{1}{2})^{\frac{N}{2}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_$$

وإذا كانت لدينا معطيات المثال (٣)، فإن:

اکن س>...>رس>، ۱ بن =(ن سه،...، سه)ه

ملاحظة:

يوجد فرق بين توزيع العينة العشوائية  $w^* = (w, *, ..., *w_o)$  وتوزيع العينة العشوائية المرتبة  $w_o^* = w_{(o)}$  ،  $w_o^* = (w, *, ..., *w_o)$   $y = (w, *, ..., *w_o)$  وتوزيع مالگر في حالة المعاينة من توزيع  $w_o^* = (w, *w_o)$  فين خالة المعاينة من توزيع  $w_o^* = (w, *w_o)$ 

$$0 \quad \text{i.i.} \quad 1 = c \quad 1 \geq 0 \quad 1 \geq 0 \quad 1 \leq c \quad 1 \leq c$$





سنما

هـ(ص>...>رس>, س>۱≥ن ان=(ن سهر...، س

وفي حالة المعاينة من توزيع ٦(١، ٢) فإن:

$$\tilde{\mathfrak{O}}(w_{\ell_1,\ldots,\ell_r}) = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{c_1} \mathbb{A}^{-\frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^r w_{i_1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1$$

# # توزيع دوال في الإحصاءات المرتبة

### Distribution of functions of order statistics

استخلصنا في الفقرتين السابقتين التوزيعات الهامشية والمشتركة للإحصاء المرتبة ذاتها. وسنبحث في هذه الفقرة توزيع دوال معينة في الإحصاءات المرتبة. إحدى أبسط الدوال في الإحصاءات المرتبة هو المتوسط الحسابي لها:

$$\frac{1}{\dot{\upsilon}}\sum_{j=1}^{\dot{\upsilon}}\omega_{ij} \qquad \text{if } \omega_{ij} = \omega_{(ij)}$$

ويما أن:

$$\frac{1}{\dot{\upsilon}}\sum_{v=l}^{o}\omega_{v_{v}}=\frac{1}{\dot{\upsilon}}\sum_{v=l}^{o}\omega_{v_{v}}=\overline{\omega}$$

فتوزيع المعاينة لمتوسط الإحصاءات المرتبة هو نفسه توزيع المعاينة لمتوسسط العينة س\*.

سنناقش في الفقرات التالية توزيع وسيط العينة، مدى العينة ونصف مـــــدى





العينة، لذا لا بد في البداية من تعريف وسيط، مدى ونصف مدى العينة. نفترض صن من توزيع مستمر صن من توزيع مستمر ق (س).

### تعريف: وسيط العينة Sample Median

يعرف وسيط العينة س° على أنه الإحصاء المرتب الأوسط إذا كانت ن فردية ومتوسط الإحصائين المرتبين الأوسطين إذا كانت ن زوجية، وإذا رمزنا بـ س

$$1+\rho T=0 \qquad f \qquad \lim_{t\to t} t = 0$$

$$\rho T=0 \qquad f \qquad \lim_{t\to t} t = 0$$

حيث إن م عدد صحيح موجب.

ونعلم من نظرية الاحتمالات أن وسيط المجتمع ق(س)، ولنومز لـه بــ

. M ، هو تلك القيمة التي تحقق الشرط:

$$\frac{1}{7} = (\tilde{\mathbf{M}})$$

## تمريف: مدى العينة Sample Range





## تعريف: نصف مدى العينة Sample Midrange

نصف مدى العينة  $m^* = (m^*, \dots, m^*)$  نرمز له بـ ت ويعرف على النحو التالى:

$$\omega = \frac{\omega_0^{\circ} + \omega_0^{\circ}}{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma} + \omega_0^{\circ}, \qquad (4)$$

## \* توزيع وسيط العينة Distribution of sample Median

بما أن وسيط العينة س عبارة عن إحصاء، أي متغير عشوائي فله توزيع إجمالي يدعى بتوزيع المعاينة لـ سَ . والإيجاد هذا التوزيع نميز حالتين: ن فردية، ن زوجية.

إذا كان حجم العينة  $m^*$  فردياً، فإن  $m = m_{\eta+1}$ ، ومن ثم توزيع m هو عبارة عن توزيع الإحصاء المرتب  $m_{\eta+1}$ ، وهذا الأخير لحمصل عليه بوضع  $m_{\eta+1}$  ن =  $m_{\eta+1}$  في الملاقة (٣).

$$\left[\tilde{(\omega)}\right] = \left[\tilde{(\omega)}\right] \left[\tilde{(\omega)$$

آما إذا كان حجم العينة  $m^*$  زوجياً (ن-٢م)، فإن  $m=\frac{m_1+m_2+m_3}{2}$ 

وعندئذ نشتق توزيع س على النحو الآتي:

 $\tan v = v + v$   $\tan v = v$   $\tan v =$ 





ويإجراء التحويل من ص =ص ي = إلى (س،ع)

حيث إن ع=صم٠١، وبملاحظة أن المحدد الجاكوبي ج=٢ نجد:

 $b(\tilde{w}, s) = \frac{v(x_3)}{(x-1)!} b(3)b(v\tilde{w} - 3) \left[ b^*(v\tilde{w} - 3) \right]^{-1} \left[ (-b^*(3)^{-1} + \tilde{w} \le 3....(6) \right]$  $b(\tilde{w}, s) = \frac{v(x_3)!}{(x-1)!} b(3)b(v\tilde{w} - 3) \left[ b^*(v\tilde{w} - 3) \right]^{-1} \left[ (-b^*(3)^{-1} + \tilde{w} \le 3....(6) \right]$ 

ك(سُ)= يَّ ك(سَ ع).دع ........(٢)

مثال (١):

بفرض  $w^* = (w^*_1, \dots, w^*_n)$ عینة عشوائیة من توزیع

ق(س) = ۲هـ<sup>۲۰</sup>س ؛ س>۱

أوجد توزيع  $m^{-}$ ، إذا علمت أن حجم العينة فردي (ن $^{-}$ 1+).

يا أن:

ق(س) = ۲هـ<sup>۲۰</sup>۰۰ ؛ س>۰ فإن ق\* (س)= ۱ -هـ<sup>۲۰۰</sup>۰۰ ؛ س>۰

وبما أن ن=٢م+١ فردي، عند أن توزيع س نحصل عليه باستخدام العلاقة...... (٤)

$$\mathbf{A}_{(\mathbf{u})} = \mathbf{A}_{(\mathbf{v})} \left( \mathbf{u}^{\mathbf{v}} - \mathbf{A}_{(\mathbf{v})} \right)^{\mathbf{v}} \left( \mathbf{u}^{\mathbf{v}} - \mathbf{A}_{(\mathbf{v})} \right)^{\mathbf{v}} \mathbf{A}_{(\mathbf{v})} \left( \mathbf{v}^{\mathbf{v}} - \mathbf{A}_{(\mathbf{v})} \right)^{\mathbf{v}} \mathbf{A}_{(\mathbf{v})} \right)^{\mathbf{v}} \mathbf{A}_{(\mathbf{v})} = \mathbf{A}_{(\mathbf{v})} \left( \mathbf{v}^{\mathbf{v}} - \mathbf{A}_{(\mathbf{v})} \right)^{\mathbf{v}} \mathbf{A}_{(\mathbf{v})} \mathbf{A}_{(\mathbf{v})} \right)^{\mathbf{v}} \mathbf{A}_{(\mathbf{v})} \mathbf{A}_{(\mathbf$$





فمثلاً، إذا كانت ن=١ ١، أي م=٥

$$(\tilde{u}^{-1} - A^{-1})^{\tilde{u}^{-1}} = (\tilde{u}^{-1})^{-1}$$

#### مثال (٢):

بفرض ص، ، ص، ، ص، الإحصاءات المرتبعة لعينعة عسسوائية m' = (m', m', m') من التوزيع المنتظم  $\pi (\cdot \cdot \cdot \cdot)$ ، أوجد توزيع الوسيط m واحسب متوسطه وتباينه.

عا أن:

$$1 \ge \omega \ge 0$$
  $\Rightarrow$   $1 = (\omega)$   $0 \le \omega \le 1$   $0 \le \omega \le 1$   $0 \le \omega \le 1$ 

فيتطبيق العلاقة (٤)، نحد:

$$1 \geq \widetilde{(m)} > \cdot \cdot \cdot (\widetilde{(m-1)} \widetilde{(m-1)} \widetilde{(m-1)} = (\widetilde{(m)}) \leq 1$$

$$e\widetilde{w} = F \int_{1}^{1} \widetilde{w}' (1-\widetilde{w}) e\widetilde{w} = F \left(\frac{\widetilde{w}'' - \frac{\widetilde{w}''}{2} \int_{1}^{1} 1 dt}{\widetilde{w}'' (1-\widetilde{w}) e\widetilde{w}} - \frac{\widetilde{w}''}{2} \int_{1}^{1} 1 dt}\right)$$

$$e\widetilde{w}' = F \int_{1}^{1} \widetilde{w}'' (1-\widetilde{w}) e\widetilde{w} = \frac{\widetilde{w}''}{2} - \frac{\widetilde{w}''}{2} \int_{1}^{2} 1 dt$$

$$i i j i j i \widetilde{w} = e\widetilde{w}'' - (e\widetilde{w}) = \frac{\widetilde{w}'' - \frac{\widetilde{w}''}{2} - \frac{\widetilde{w}''}{2}}{2} = \frac{\widetilde{w}''}{2}$$





## # توزيع مدى ونصف مدى العينة

#### Distribution of Sample Range and Midrange

لاشتقاق توزيع كل من مدى العينة ح= صن-ص، ونصف مدى العينة

$$=\frac{\omega_1+\omega_0}{\gamma}$$
, نبحث أولاً عن توزيع ( $\omega_1$ ) وهو:

$$A_{v_{v}}(w) = v'(v - 1) \cdot (w) \cdot (w) \cdot (w) \cdot (w) \cdot (w) \cdot (w) = (w \cdot w) \cdot (w) \cdot (w)$$

وبالتحويل من (ص١، ص١) إلى (ح، ت)، حيث أن:

$$\frac{-\frac{C}{\gamma} = \omega}{\gamma} = \omega$$

$$\frac{C}{\gamma} = \omega$$

ومن ثم جاكوبي التحويل:

$$1 - = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{vmatrix} = 7$$

وبالتالي، فإن دالة الكثافة لـ (ح، ت)

$$(V)$$
... $(V)$ - $(V)$   $(V$ 

وبناءً على ذلك فدالة الكثافة الاحتمالية للمدى ح:

$$\mathbb{E}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(\zeta, \tau) c \tau . \tag{A}$$





ودالة الكثافة الاحتمالية لنصف المدى:

$$\mathbb{P}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}} \mathbb{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}$$

مثال (٣):

بفرض  $m' = (m, \dots, m)$ ) عينة عشوائية من التوزيع المتنظم (\*, \*) اوجد:

- ١. التوزيع المشترك للمدى ح ونصف المدى ت.
  - ٢. التوزيع الهامشي للمدي ح.
  - ٣. التوزيع الهامشي لنصف المدى ت.

عا أن:

فإن دالة الكثافة المشتركة لـ ح وتـ هي:

١> ت+ت>٠

ومن ثم دالة الكثافة الهامشية لـ ح:





#### ودالة الكثافة الهامشية لـ ت:

### # توزيم المعاينة لـ ق (س) Sample distribution of

نلاحظ من تعريف دالة التوزيع التجريبي ق رْ(س) أنها عبارة عن إحصاء، عند كل قيمة حقيقية س، لكونها دالة في بيانـات العينــة، أي مـتغيراً عـشوائياً، وبالتالى لها توزيع احتمالي تحدد المبرهنة الآتية:

مبرهنة: لتكن  $\bar{v}_{o}(m)$  دالة التوزيع التجريبي لمتغير عشوائي ع الموافقة لعينة عشوائية  $m=(m_1, \dots, m_0)$  من توزيع b(3)، ولنفترض b(m) دالمة التوزيع النظري لـ ع. عندئذ توزيع b(m) يعطي بالعلاقة الآتية:

$$(1)\dots, (1, 0) \leftarrow \frac{d}{d} = (0, 0)^{d} \left[ (0, 0)^{d} \right]^{d} \left[ (0, 0)^{d} \right] = \frac{d}{d} = (0, 0)^{d}$$

الإثبات: نلاحظ بوضوح أن المتغير العشوائي ق ﴿(س)يفترض القيم:

$$1 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1 - \partial}{\partial x} \dots \frac{1}{x} \frac{1}{x} \frac{1}{x}$$

$$(1)$$

وإذا رمزنا بـ: عي =  $\left\{ \begin{array}{cc} 1 & m_{y} < m \\ 2 & m_{z} \geq m \end{array} \right.$ 

فإن عي منفير عشوائي يتبع توزيع بيرنولي ب(١، ق(س))، ومن شم ع= يُّع ي يتبع توزيع ذي الحدين ب(ن، ق(س))، حيث أ، ع يمثل عـــدد القـــم



سي الأقل من س. ولكن حسب التعريف:

ق ْ(س)= لَٰ کِیّے ع<sub>و</sub> وعلی ذلك یكون له نفس توزیع المعاینة لمتوسط عینــة عشوائیة ماخوذة من توزیع بیرنولی، أي آن:

$$\dot{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(\omega) = \frac{d}{\dot{\mathcal{G}}} \left( \omega \right)^{d-\dot{\omega}} \left[ (\omega)^{\dot{\omega}} - 1 \right] \left( \omega \right)^{b} \dot{\mathcal{G}}_{\dot{\omega}} = \left( \frac{d}{\dot{\omega}} = (\omega)^{\bullet} , \ \dot{\mathcal{G}}_{\dot{\omega}} \right)^{b}$$

وهو المطلوب.

 $\frac{\mathcal{E}}{\dot{v}} = (\omega)^*_{\dot{v}}$  ها أَنْ: قَ نَ

فإن:

$$\varepsilon \left[\tilde{c}_{o}^{*}(\omega)\right] = \varepsilon \left(\frac{3}{o}\right) = \frac{1}{c} \varepsilon_{3} = \frac{1$$

### \* الشمولات أو الغطيات Coverage's

لنفرض أن  $m^* = (m_1^*, ..., m_3^*)$  عينة عشوائية من توزيع مستمر b(3) دالة كثافته b(m) ودالة توزيعه b(m) ولتكن b(m) b(m) المينة الموافقة لـ b(m)

توجد خاصتان مهمتان للإحصاءات المرتبة، مفيدتان جداً عند دراسة بعض طرق الاستدلال الإحصائي، وهما:





 المساحة المحددة بدالة الكثافة ق(س) وأي إحسائين مرتبين مستقلة عن دالة الكثافة هذه.

 الإحصاءات المرتبة ص: ١٠٠٠،٠٠٠ وقا المتوسط) المساحة تحت منحنى التوزيع ق(س) إلى (ن+١) جزء متساو، ومساحة كل جزء تساوي ١/(ن+١).

إثبات الخاصة (١):

إذا رمزنـا بــ لي= ق(صي) ؛ ي = ١، ... ، ن فــإن لي مــتغير عــشوائي يخضع للتوزيع المنتظم ج(١،٠)، ومن ثم الفرق:

$$a_{y_0} = b_0 - b_y = \delta(a_{y_0}) - \delta(a_{y_0}) = -(a_{y_0} < a < a_{y_0})$$

عبارة عن المساحة الححدة بمنحنى التوزيع ق(س) والإحصائين المرتبين صي، ص.؛ ي<ر ويصبح المطلوب إثبات أن التوزيع الاحتمالي للفرق عي, لا يعتمد على التوزيع ل(ع).

بناءً على نتائج المثال (٣)، فإن كثافة الاحتمال (لي، لر) هي:

$$(U_{\varphi},U_{\varphi}) = \frac{(U_{\varphi},U_{\varphi})}{(U_{\varphi},U_{\varphi})} = \frac{(U_{\varphi},U_{\varphi})}{(U_{$$

وبالتحويـل مـن المـتغير (لي، لر) إلى المـتغير (لي، عي,)، وبملاحظـة أن المحدد الجاكوبي ج=١

نجد:

$$1 \geq 1 + \sum_{i \geq 1} \frac{(i-1)!(i-2)!}{(i-2)!} \int_{\mathbb{R}^{n-1}}^{\mathbb{R}^{n-1}} d^{n-1} d^{n-1$$





وبإجراء تكامل الدالة ك(ل، ع) بالنسبة لـــ ل نحـصل علــى دالــة الكثافــة الاحتمالية لــ ع<sub>ك.</sub>:

$$\mathbb{E}(3) = \frac{\dot{0}!}{(2-1)!(1-2-1)!(1-2-1)!}$$
 مد دل  $\mathbb{E}(3) = \frac{\dot{0}!}{(2-1)!(1-2-1)!(1-2-1)!}$  مد دل ولحساب هذا التكامل نفيع  $0 = \frac{U}{1-1}$ 

ويناءُ على العلاقة (٣٦) والخاصة (٢) لدالة جاما، نجد:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} du \, \frac{1}{(\nu-\alpha)} \int\limits_{0^{-\varepsilon}}^{\infty} \frac{1}{(\nu-\alpha)} \frac{1}{(\nu$$

وبالتعريض في (١) نحصل على دالة كثافة توزيع عي ر = ع

$$(7)...*^{(\nu+\nu)} \underbrace{(\nu-1)!(\nu-2)!(\nu-1)!(\nu-1)!}_{(\nu-2)!(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-1)!(\nu-2)!(\nu-2)!}_{(\nu-2)!(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-1)!(\nu-2)!(\nu-2)!}_{(\nu-2)!(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-1)!(\nu-2)!(\nu-2)!}_{(\nu-2)!(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-1)!(\nu-2)!(\nu-2)!}_{(\nu-2)!(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-1)!(\nu-2)!(\nu-2)!}_{(\nu-2)!(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-1)!(\nu-2)!}_{(\nu-2)!(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-1)!(\nu-2)!}_{(\nu-2)!(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-1)!(\nu-2)!}_{(\nu-2)!(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-1)!(\nu-2)!}_{(\nu-2)!(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-1)!(\nu-2)!}_{(\nu-2)!(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-1)!(\nu-2)!}_{(\nu-2)!(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-1)!(\nu-2)!}_{(\nu-2)!(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-1)!(\nu-2)!}_{(\nu-2)!(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-1)!(\nu-2)!}_{(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-2)!(\nu-2)!}_{(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-2)!(\nu-2)!}_{(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-2)!}_{(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-2)!(\nu-2)!}_{(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-2)!}_{(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-2)!(\nu-2)!}_{(\nu-2)!} \underbrace{(\nu-2)!}_{(\nu-2)!} \underbrace{($$

وهذه دالة كثافة توزيع ب(ر-ي)، ن-ر+ي+١)، وهـو لا يعتمـد علـى توزيع الجُتمع ق(س).

إثبات الخاصة (٢)

$$e S = \int_{-\infty}^{\infty} S D(3) \, d3 = \frac{0!}{(c-v)!(\dot{v}-c+v)!} \int_{-\infty}^{\infty} S^{v-1}(1-3) \, e^{-c+v} \, d3$$

$$= \frac{0!}{(c-v)!(\dot{v}-c+v)!} = \frac{1}{1(\dot{v}-c+v)!} \frac{1}{1(\dot{v}-c+v)!$$

Z III



$$=\frac{\dot{\upsilon}_{\frac{1}{2}}}{(\dot{\upsilon}-\dot{\upsilon}+\dot{\upsilon})\frac{(\dot{\upsilon}-\dot{\upsilon}+\dot{\upsilon}+1)-(\dot{\upsilon}-\dot{\upsilon}+2)+1)}{(\dot{\upsilon}-\dot{\upsilon}+1)\frac{1}{2}(\dot{\upsilon}-\dot{\upsilon}+2)}}$$

وبوضع ر=ي+١ نجد رع=<u>ر+-</u>، وهو المطلوب.

### تعريف: المشمولات أو المغطيات Coverage's

تدعی الفترات  $(-\infty, w_0)$ ،  $(w_0)$ ،  $(w_0)$ ،  $(w_0)$ ،  $+\infty$  بخلایا العینة  $w^*$ ، ونرمز لها به ب۱، ب۲، ب۲، ... ، ب $(w_0)$  علی الترتیب، کما تدعی الدوال (الإحصاءات):

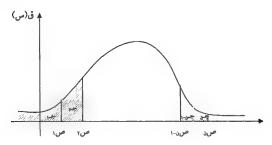
$$-1$$
ب ق (ص) – ق (ص) = ل الم

\*

ن د ... د ا = ق 
$$(+\infty)$$
 – ق  $(-\infty)$  =  $(-0)$  و مین = س بی ا

في هذه الخلايا بالمشمولات أو المغطيات، حيث إن مجموعها  $\sum_{v=1}^{\infty} + v = 1$  ويبدو ذلك وهذا يعني أن جي غطاء الخلية بي حيث ي=1، ...، ن+1، ويبدو ذلك بوضوح على الشكل (1).





بما أن الغطاء جر؛ ر-1، ... ، ن متغير حشوائي، فله إذن توزيع احتمالي، وهذا التوزيع يمكن إيجاده بسهولة بوضع ر-1 و ر، ي-1 في العلاقة (-1):

(3) 
$$(\xi - \xi) = \xi (1 - \xi)^{(-1)}$$

وبناءً على ذلك:

$$\begin{split} \varepsilon(\leftarrow_{\nu}) = \dot{\psi} \int_{\gamma} \beta(t-\beta) \, e^{-t} \, c \, \beta = \dot{\psi} \frac{T_{(\gamma)} T_{(\omega)}}{T_{(\dot{\omega}+\gamma)}} \frac{t}{\dot{\omega} + t} \\ \varepsilon(\leftarrow_{\nu}) = \dot{\psi} \int_{\gamma} \beta(t-\beta) \, e^{-t} \, c \, \beta = \dot{\psi} \frac{T_{(\gamma)} T_{(\dot{\omega}+\gamma)}}{T_{(\dot{\omega}+\gamma)} (\dot{\omega} + t)} \frac{\gamma}{\dot{\omega}} \\ \dot{\omega}(\leftarrow_{\nu}) = \varepsilon(\leftarrow_{\nu}) - \left[ \varepsilon(\leftarrow_{\nu}) \right]^{\gamma} = \frac{\dot{\omega}}{(\dot{\omega} + \gamma)(\dot{\omega} + t)} \frac{\gamma}{\dot{\omega}} \end{split}$$

## \* الماينة في حالة عينات كبيرة Sampling For large Samples

بحثنا في البنود السابقة من هذا الفصل أساسسيات نظريــة المعاينــة في حالــة





عينات بحجم محدود ن ولنتأمل الآن النتائج التي يمكن الحصول عليها من نظرية المعاينة عندما نجعل ن $\longrightarrow \infty$ , في هذه الحالة لمدينا مجتمع دالمة توزيعه ق(س) وندرس متتالية من المتغيرات العشوائية  $w_*, w_*$ ... المستقلة مثنى مثنى، وأي فئة من ن من تلك المتغيرات تعتبر عينة عشوائية بحجم ن مأخوذة من المجتمع ق $w_*$ (س).

وسنعتمد في هذا البند على مبرهنات النهاية ونتائجها المفيدة لدراسة السلوك التقاربي لمميزات العينة وإيجاد التوزيعات التقريبية لدوال غتلفة في العينة، في حالة عينة كبيرة الحجم.

### \* تقارب عزوم العينة بالاحتمال

#### Convergence of Sample Moments in Probability

أحد أبسط النتائج المتعلقة بعـزوم العينـة مـن أجـل عينـات كـبيرة معطـاة بالمبرهنة الآتية:

مبرهنة: إذا كانت  $w^* = (w^*, ..., w^*)$  عينة عشوائية من توزيع b(3)، وكان العزم من المرتبة ر للعينة  $w^*$  يتقارب بالاحتمال من العزم من المرتبة ر لـع عندما ن $\longrightarrow$  0.

الإثبات: لنرمز للعزم الابتدائي من المرتبة ر المعرف بالعلاقة (١) بـــ أهر للإشارة إلى علاقة عزم العينة بمجمها ن.

كما تعلم:

 $\alpha = \alpha$ 





 $\frac{\gamma_{\alpha-\gamma}\alpha}{\sigma} = \frac{\gamma_{\alpha-\gamma}\alpha}{\sigma}$  وحسب متباینة تشیبیشف:

 $\frac{\sqrt[3]{\alpha_{-1}}\alpha_{-1}}{\sqrt[3]{\beta_{-1}}} - 1 \le (\beta \ge |\alpha_{-1}|) \le \frac{1}{2}$ 

وبأخذ نهاية الطرفين، عندما ن ← ، نجد: نبهاح| مراءريا ا=(2 ≥ |

لأن الاحتمال لا يتجباوز الواحـد والعـزم الابتـدائي مـن المرتبـة ر لـــع موجود (حسب الفرض)، وهو المطلوب.

ویشکل مشابه، یمکن الإثبات من أجل العزم المرکز م $_{\rm c}$ , للعینة  $_{\rm c}$  علی أنه یتقارب بالاحتمال من العزم المرکزی  $_{\rm c}$ ,  $_{\rm c}$ 

تعني المبرهنة أن عزوم العينـة تعتبر قيمـاً تقريبيـة جيـدة للعـزوم النظريـة الموافقة لها (إذا كانت هذه الأخيرة موجودة) في حالة عينات كبيرة الحجم.

وكحالة خاصة، عندما ر = ۱ فـإن أن  $\overline{w}=\overline{w}$  و M=1، أي أن متوسط العينة متقارب بالاحتمال من متوسط المجتمع M.

وكذلك، عندما ر $^2$  ف لون م $^2$  و  $^3$  و  $^3$ ، أي أن تبـاين العينـة متقارب بالاحتمال من تباين المجتمع  $^3$ .

بصورة عامة، تبقى المبرهنة صحيحة من أجل أي دالة مستمر لعـدد منتـه من الكميات أور (فمثلاً، مور دالـة مستمرة في أدا، ... ، أور على شـكل كثير حدود من الدرجة ر).

وهذه تعتبر نتيجة للمبرهنة العامة الآتية حول التقارب بالاحتمال لدالـة مستمرة في متغيرات عشوائية.





مبرهنـة: لـتكن المـتغيرات العـشوائية  $\eta_1(i), \eta_2(i), \eta_1(i)$  متقاربـة بالاحتمال، عندما ن  $\longrightarrow 0$  إلى الثوابت جـ،  $\mapsto \pi_1$  ... ، جـر علـى الترتيب، عندها من أجل أي دالة مستمرة  $\eta_1(i)$  ... ،  $\eta_2(i)$  فالمتغير العشوائي:

بما أن  $\varphi$  دالة مستمرة، فإنه مهما يكن العدد الحقيقي -3 يمكن إيجاد عدد حقيقى  $\delta$  (3) مجيث أن:

من أجل إس ب-جـ | δ ؛ ي= ۱، ۲، ۱، س، ر

ومن ثم:

وبناءً على التقارب بالاحتمال، حسب الفرض، للمتغیرات العشوائیة  $\pi$  ,  $\pi$  )، فإنه من أجل أي عدد حقیقي  $\delta$  وأي  $\pi$  > ، يمكن إيجاد عدد طبيعي  $\sigma$  و  $\sigma$  )، عيث إن:





نجد أن المتباينات: ح  $(\overline{\Psi}_{\nu}) < \frac{\gamma}{\nu}$ ؛ ي = ۱، ۲، ... ، ر

محققة في آن واحد عندما ن،≥ن.، وبالتالي:

وهو المطلوب.

نشير أيضاً لاستخدام إحصائي آخر للمبرهنة الثانية، عند دراسة خمواص منحنى توزيع متغير عشوائي مستمر، حيث نحتاج في الغالب لإيجاد معامل الالتواء ١٧ ومعامل التطاول٧٢، المعرفين كما يلى:

$$\gamma_{r} = \frac{M_{\gamma}}{M_{\gamma}^{\gamma \vee r}}$$
  $\gamma_{r} = \frac{M_{\lambda}}{M_{\gamma}^{\gamma}} - \gamma$ ....(1)

وإذا كانت العينة العشوائية  $w^* = (w^*, w^*, w^*, w^*)$  من توزيع مستمر U(3)، فإن معامل الالتواء والتطاول للعينة العشوائية  $\Gamma_{01}$ ، عرفان على النحو الآتى:

$$T_{\omega} = \frac{\eta_{\omega}\eta}{\eta_{\omega}^{2}}$$
,  $T_{\omega\eta} = \frac{\eta_{\omega}\eta}{\eta_{\omega}^{2}} - \eta$ 

وبملاحظة أن  $T_0$  ي  $P_0$  > دالستين مستمرتين، عندما  $P_0$  > ، في عزوم العينة وبالتالي حسب المبرهنة الثانية فإن  $P_0$   $P_0$  يتقاربان بالاحتمال إلى المميزين النظريين الموافقين لهما  $P_0$  عندما ن  $P_0$ .



## \* التوزيعات التقريبية للعزوم الابتدائية للعينة

Approximating Distribution of sample elementary Moments

نفترض أن العزوم المختلفة من المرتبة ر للمجتمع ل(ع) موجودة، وهذا ما

نتخاه دائماً.

Convergence in ) إذا كان توزيع المتغير العشوائي  $\eta_0$  يتقارب بـالتوزيع (distribution من توزيع المتغير العشوائي $\eta_0$ ، عندما ن $0 \longrightarrow 4$ 

$$U(\eta i) \rightarrow (\eta)$$
 to  $U(\eta i) \xrightarrow{c \rightarrow \infty} U(\eta)$ 

وفيما يلي، إذا كان المتغير العشوائي  $\eta_i$  ن  $\infty$  يتقارب من التوزيع الطبيعي بالمعلمتين  $M_i^*$  مندما. أي له التوزيع الحدي ن  $M_i^*$   $M_i^*$   $M_i^*$  فنعبر عن ذلك:

$$U(\eta_{\circ})$$
 وهذا يعني:  $U(\eta_{\circ}) \cap U(\eta_{\circ})$  وهذا يعني:

$$(1 \circ )^{(t)} \ \dot{\cup} \underbrace{\hspace{1cm} \overset{\circ}{\smile} \overset{\smile}{\smile} \overset{\circ}{\smile} \overset{\smile}{\smile} \overset{\circ}{\smile} \overset{\smile}{\smile} \overset{\smile}{\smile}$$

يعطى التوزيع الحدي للعزم الابتدائي أ<sub>در</sub> للعينة بالمبرهنة الآتية.

مبرهنة: إذا كان أن رالعزم الابتدائي من المرتبة رالمينة عشوائية بمجم ن مجتمع ل (3) عزمه الابتدائي  $\alpha$  موجود (منته)، فإن التوزيع الحدي ل أن هو ن  $(\frac{y\alpha_{-\gamma}\alpha}{i})$ ، أي أن:





الإثبات: كما تعلم أور عبارة عن متوسط ن من المتغيرات العشوائية  $w_{\nu}$ ?  $y=1,\dots$  ن المستقلة مثنى مثنى ولها نفس التوزيع، وهمو توزيع  $z^{\nu}$ ، إذن، حسب مرهنة النهاية المركزية، فإن:

$$U(|_{\omega_{c}}) \xrightarrow{\omega \to \infty} U(|_{\Omega_{c}}) \xrightarrow{\alpha_{\gamma_{c}} - \alpha_{\gamma_{c}}} e^{i\omega t_{\gamma_{c}}} e^{i\omega t_{\gamma_{c}}}$$

$$U(|_{\omega_{\gamma_{c}} - \alpha_{\gamma_{c}}}) \xrightarrow{\omega \to \infty} U(|_{\omega_{\gamma_{c}} - \alpha_{\gamma_{c}}}) e^{i\omega t_{\gamma_{c}}} e^{i\omega t_{\gamma_{c}}}$$

$$U(|_{\omega_{\gamma_{c}} - \alpha_{\gamma_{c}}}) = e^{i\omega t_{\gamma_{c}}} e^{i\omega t_{\gamma_{$$

وهو المطلوب.

distributed asymptotically ) وهذا يعني أن أور يتوزع طبيعياً بالتقارب ( ( $\alpha_r - \frac{\alpha_r}{v}$ ) مسن أجل ن كسبيرة، ومسن أسم ( normally ) وفسق ن (( $\alpha_r - \frac{\alpha_r}{v}$ ) مسن أجل ن  $\alpha_r - \frac{\alpha_r}{v}$ ) من أجل ن كبيرة.

مېرهنة: (مېرهنة كليفينكو (Klevenco Theorem)):

وبناءً على شروط المبرهنة السابقة، فإن:

(A).... 1= 
$$\left| \frac{1}{1+|u|} \left| \frac{1}{1+|u|} \left| \frac{1}{1+|u|} \left| \frac{1}{1+|u|} \right| \right| \right|$$

وتنص على أنه باحتمال يساوي الواحد فإن  $\bar{v}_o(\omega)$  تتقارب بانتظام س من ق(س)، وهذا يعني أن  $\bar{v}_o(\omega)$ ، كمقدر لـ ق(س)، يتقارب من ق(س) بانتظام لجميع قيم س وذلك باحتمال يساوي الواحد، وبعبارة أخرى يكون





الفرق أن (س)-ق(س) صغيراً بقدر ما نريد (من أجل كل قيمة لـ س) باحتمال يساوي الواحد، عندما يكون حجم العينة كبيراً.

وإذا رمزنا بـ:

فإن دن متغير عشوائي منقطع يقيس الانحراف الأعظم للدالة ق (س) عن الدالة ق(س) على كامل محور الأعداد الحقيقية، ومن ثم يمكن كتابة العلاقة (٨) على الصورة:

مبرهنة: مبرهنة كالماغوروف Kalmagorov Theorem

إذا كان المتغير العشوائي الملاحظ ع مستمراً، دالـة توزيعـه ق(س)، فمــن أجل أي قيمة حقيقية معينة ع>° تتحقق العلاقة الآتية:

$$\sum_{k \to \infty} \sum_{j=0}^{k} \left( \sum_{i=0}^{k} \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right) = \sum_{i=0}^{k} \left( \frac{1}{\sqrt{k}}$$

وعندما تكون ن كبيرة (ن≥٢٠) فإن:

$$\int_{\mathbb{C}} \left( c_{0} < \frac{3}{\sqrt{C}} \right) \approx \mathbb{E}(3) \approx 1 - 74e^{-3/3}. \tag{(11)}$$





هذا يعني أنه يمكن استخدام التوزيع كن كتقريب جيد لـ  $3\left(\frac{2}{|V|}\right)$  في التطبيقات الإحصائية وذلك عندما تكون  $(\dot{U} > 1)$ .

تستخدم مبرهنة كالماغورورف لإيجاد الحدين (القيمتين) اللدين تقع بينهما دالة التوزيع ق(س)، عندما تكون هذه الأخيرة غير معلومة، وذلـك باحتمـال معين α ∈ (٠٠)، حيث إن:

$$3 \left( c_{c} < \frac{2\alpha}{\sqrt{|c|}} \right) = 3 \left( \tilde{b}_{c}(c) - \frac{2\alpha}{\sqrt{|c|}} < \tilde{b}(c) \right) < \tilde{b}_{c}(c) + \frac{2\alpha}{\sqrt{|c|}} \right) ? \ \forall \ \mathbf{w} \in \mathbf{J}$$

وعندما تكون (ن  $\geq 1$ ) فإن ع $_{0}$  تعين من المساواة: أثرع =  $\alpha$ .

هكذا، عندما تكون (ن≥٢٠)، فإن المتبايئة:

$$(14)$$
  $\frac{2}{\sqrt{i}} < \delta(\omega) < \delta_{\circ}(\omega) < \frac{1}{\sqrt{i}} + \forall \omega \in \sigma$ 

محققة باحتمال يساوي α تقريباً، لكن ٠≤ ق(س)≤١، وبالتالي يمكن كتابـة المتباينة (١٣) على النحو الآتي:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{L}} + \frac{2}{\sqrt{L}}\right)^*_{\dot{u}}$$
ق (س)< قیمة صغری (۱۰ق  $\left(\frac{2}{\sqrt{L}}\right)^*$ ق (س)

تكمن أهمية الإحصاء دن(س) في توزيعه مستقل عن توزيع المجتمع الـذي سنبحث منه العينة س، أي أن دن حر التوزيع، ويمكن إثبات ذلـك علـى النحـو الاتي:

إذا رمزنا بـ ق(س) = ل فإن:





وبالتعويض في (٩)، نجد:

 $c_{i} = \delta _{i}$  فيمة قصوى  $| \delta _{i} ^{*} [ \delta _{i} ^{*} ] | \delta _{i} ^{*} | \delta _{i} | \delta _{$ 

وبالانتقال إلى المتغيرات العشوائية:

لي= ق(سي) ؛ ي= ١، ...، ن

 $U_{(i)} \leq U_{(i)} \leq U_{($ 

الإحصاءات المرتبة للعينة (ل، ... ، لن).

وبملاحظة أن المتباينة  $w_{(v)} \le w$  مكافئة للمتباينة  $w_{(v)} \le w$  وبالتعويض في العلاقة (٣)، نجد:

$$\tilde{\mathfrak{b}}_{\circ} \left[ \left[ \tilde{\mathfrak{b}}^{-1}(L) \right] = \frac{1}{U} \sum_{i,j}^{\infty} \mathbb{A}_{i} \left( e_{i,j} - e_{i,j,j} \right) = \frac{1}{U} \sum_{i,j}^{\infty} \mathbb{A}_{i} \left( L - L_{i,j} \right) = \Phi_{\circ}^{*}(L) \cdots (3 \ )$$

يعني هذا أن الدالة  $v_0(m)$  لا تعتمد على الدالة  $v_0(m)$  وكما نملم أن توزيع لي=  $v_0(m)$  هـ و التوزيع المنتظم  $v_0(m)$  و  $v_0(m)$  دائة التوزيع الموافقة للعينة الملاحظة ل=  $v_0(m)$  المائعوذة من التوزيع  $v_0(m)$  وعلى ذلك فإن  $v_0(m)$  يطابق قيمة قصوى  $v_0(m)$  ومن شم توزيع دن مستقل عن  $v_0(m)$  (لا يعتمد على توزيع المجتمع الأساسي).

وهذه الحاصة لها أهمية كبيرة، حيث يكفي حساب وجدولة توزيع دن مـرة واحدة من أجل عينات عشوائية مأخوذة من التوزيع ズ(٠،١).

بناءً على ذلك وعلى التوزيع المقارب لثن م بناء جدول اختبار





كالماغوروف، الذي يعطي القيم الحرجة λ الموافقة لكل من الاحتمال α وحجم العينة ن، يحيث:

ح(د ن≥λ)= α.

وعندما تكون ن كبيرة، فإن:  $\int_{V_0} \sum_{|V_0|} x \propto e^{-2s}$ 

ومنها: 
$$\sigma(c_0 \ge \frac{3}{\sqrt{G}}) = \alpha \Rightarrow \alpha \approx 74^{-1/3}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha}$$
وبأخذ لوغاريتم الطرفين، نجد: ع $\alpha$  العرفين، الع

وهذا يعني، عندما تكون ن كبيرة فإن الحمد الحموج λ، يعمين مـن الـصيغة التقريبية:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{3\alpha}{\sqrt{1-\gamma}} \approx \frac{\alpha E}{\sqrt{\gamma}} = \alpha \lambda$$

بالإضافة إلى ما سبق، فإن خاصة حر التوزيع لــ دن، أدت إلى استخدام واسع له أن الإحصاء في التطبيقات الإحصائية، وخاصة في مجال الاستدلال الإحصائي اللا معلمي.

#### مبرهنة: مبرهنة سميرنوف Smirnove Theorem

إذا كانت ق أ(س)، ق أ(س) دالتي التوزيع التجريبي للمتغير العشوائي المستمر ع الموافقتين لعينتين عشوائيتين محجم ن١، ن، على الترتيب، والمأخوذتين من توزيع ق(س)، وكان:

 $\iota_{000} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \right) \right) \right) \right) \right) \right]$ 





فإن:

من أجل أي عدد حقيقي ع>ه، حيث إن الدالة كرم، معرفة بالعلاقـة (٢) ولهذه المبرهنة استخدام هام في اختبار الفرضيات.

## \* التوزيع المقارب لوسيط العينة

#### Asymptotic Distribution of Sample Median

وجدنا في فقرة ماضية أن التوزيع الاحتمالي لوسيط عينـة عـشوائية س= (س،، ...، س.) ماخوذة من توزيع مستمر ق(س).

وذلك عندما يكون حجم العينة ن صغيراً أو كبيراً، سنبحث في هذه الفقرة عن التوزيع التقريبي لوسيط عينة عشوائية كبيرة الحجم.





وقيمته المتوقعة وتبيانه:

ومن ثم بافتراض حجم العينة فردي (ن=٢م+١)، فإن القيمة المتوقعة والتباين لوسيط عينة عشوائية (ل،، ...،  $b_0$ ) مسحوية من توزيع منتظم (0,0) هما (بوضع (0,0)):

$$e(\widetilde{\bigcup}) = \frac{1}{\gamma} \quad \omega \quad , \qquad s(\widetilde{\bigcup}) = \frac{1}{3(\dot{\cup} + \gamma)} \dots$$

وبناءً على المبرهنة الآتية: إذا كان س متغيراً عشوائياً بمتوسط M وتباين  $\sigma^{7}$ ، وكانت  $\sigma=2(m)$  واص) و  $\sigma^{6}$ 0 تقريباً وفق العلاقتين:

$$(M)$$
  $\frac{1}{\sqrt{3}}$   $\sigma \frac{1}{\sqrt{3}} + (M) = 0$ 

يمكن إيجاد قيمة تقريبية لكل من القيمة المتوقعة والتبـاين للإحـصاء صي باستخدام العلاقة بين صي و لـ (ي) على النحو الآتي:

$$U_{(2)} = \tilde{\mathfrak{o}}(\omega_{2}) \Longrightarrow \omega_{2} = \tilde{\mathfrak{o}}^{-1}(U_{(2)})$$

ومن ثم:





$$3(\omega_{\psi}) \approx \frac{(1+\psi-\dot{\psi})}{\left\{\left[\left(\frac{\psi}{1+\dot{\psi}}\right)^{\perp}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(1+\psi)(\gamma+\dot{\psi})}{(1+\dot{\psi})(\gamma+\dot{\psi})} \approx (\omega_{\psi})^{\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}} + 1 \cdot \tilde{\mathbf{J}} \cdot \tilde{\mathbf{J}} = \frac{1}{2} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} \cdot \tilde{$$

عندما تكون ن كبيرة.

وهذا يعني أن وسيط العينة تقدير غير متحيز تقريباً لوسيط المجتمع  $\widetilde{\mathbf{M}}$ . مبرهنة: إذا كانت  $\mathbf{m}=(\mathbf{m}_1,\ldots,\mathbf{m}_0)$  عينة عشوائية من مجتمع كثافة توزيعه الاحتمالية ق( $\mathbf{m}$ ) ودالة توزيعه ق( $\mathbf{m}$ )، فإن وسيط همله العلاقة  $\widetilde{\mathbf{m}}$  يتوريع تقريباً وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط و  $\widetilde{\mathbf{m}}$  وتباين ع  $\widetilde{\mathbf{m}}$  = ع  $\widetilde{\mathbf{m}}$  ع  $\widetilde{\mathbf{m}}$  = عندما تكون ن كبيرة.

أي أن:

$$\begin{array}{c} L(\widetilde{m})= \mathrm{i} \otimes \left(\widetilde{\widetilde{\mathbf{M}}} \circ \widetilde{\mathbf{M}}\right) \\ \mathrm{id} & \mathrm{id} \otimes \widetilde{\mathbf{M}} \end{array}$$
 ومن ثم:  $\mathbf{L} \left[ \Upsilon / \widetilde{\mathrm{bo}} \otimes (\widetilde{\widetilde{\mathbf{M}}}) (\widetilde{\mathbf{m}} - \widetilde{\widetilde{\mathbf{M}}}) \right] \approx \mathrm{i} \otimes (\mathrm{a})$ 





## تمارين

#### المطلوب:

- ١. بناء جدول التوزيع التكراري لدرجات الطلاب.
- ٢. إيجاد دالة التوزيع التجريبي لـ ع الموافقة للعينة الملاحظة.
- ٣. رسم المدرج التكراري للتوزيع التجريبي لدرجات الطلاب.
- ٢- ليكن لدينا التوزيع التجريبي لمتغير عشوائي مستمر كما هـو مبين في الجدول الآتي:

جدول التوزيع التجريبي

٧	٦	٥	٤	٣	۲	١	القيم الملاحظة س
1,+0	1,10	٠, ٢٠	۰٫۳۰	1,10	1,11	٠,٥	التكرار النسبي ني/ن

#### المطلوب:

- ١. إيجاد دالة التوزيع التجريبي لـ ع.
- ٧. رسم المدرج والمضلع للتوزيع التجريبي لـ ع.
- ٣. ما هو نوع توزيع ع الذي تستقرئه من شكل المدرج أو المضلع التكراري؟.





٣- إذا كانت س= (س،، ... ، سن) عينة عشوائية من مجتمع ينبع توزيع ق(س، ()، فيين أي من الدوال الآتية يمثل إحصاء:

$$\dot{\Sigma}_{j} = \sum_{i} C_{ij} + \Theta \quad , \quad \dot{\Sigma}_{\gamma} = \frac{\omega_{i} + \omega_{i\gamma}}{\gamma} \quad , \quad \dot{\Sigma}_{\gamma} = \prod_{i=1}^{6} \frac{\omega_{ij}}{\Theta^{\gamma}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{V}} = \sum_{k=1}^{k-1} \left\{ \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{V}} \quad \text{o} \quad \dot{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{A}^{\Theta \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{V}}} \quad \text{o} \quad \dot{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{f}} = \frac{\boldsymbol{N} \boldsymbol{V}^{\boldsymbol{O} \boldsymbol{V}} \boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{U}}} \right.$$

 إذا كانت س=(س، س، س، س، عينة عشوائية من التوزيع ح(٠،١) فأوجد توزيع كل من المتغيرين:

٥- إذا كانت س=(س١، س٣) حينة عشوائية من التوزيع ن(١)(١٠) فأوجد:

Y. 
$$rectant{teta_{v_1-w_1}^{\top}} \frac{(w_1+w_2)^{\top}}{(w_1-w_2)^{\top}}$$

$$\frac{(w_1+w_7)}{\sqrt{(w_1-w_7)^7}}$$
 توزیع

 $\Gamma$  - بفرض  $m = (m_1, ..., m_6)$  عينة عشوائية من التوزيع  $i^{(1)}(*, 1)$ ، أوجد:



المرابع + (ن - الله) س المرابع + (ن - الله) س ٢. توزيع ك< ن ؛

۳. توزیع س<u>ب</u>

٧- إذا كانـــت س=(س١، س٢) و ص=(ص١، ص٢) عينـــتين عـــشوائيتين
 مستقلتين من التوزيم ن(١)(١، ١) و ن(١)(١) على الترتيب، فأوجد:

۱. توزیع سَ+ص

۲. ا [(س,-س,) + (ص,-س,) ] / ۲/(ص,-س,)

7. (my-w) / (T-w) . T

 $\Lambda$ - أ\_\_\_\_\_ تكن ل  $(m_2) = 0^{(1)}(2_2, 2^3)$  = 1.7.7 و  $m_1$  ،  $m_2$  ،  $m_3$  ،  $m_4$  متغيرات عشوائية مستقلة مثنى مثنى :

۱. أعط مثالاً لإحصاء يتبع بتوزيع  $^{7}\lambda$  بثلاث درجات حرية.

٢. أعط مثالاً لإحصاء يتبع توزيع ق٢.١٠.

٣. أعط مثالاً لإحصاء يتبع توزيع م (٢).

9 - 1 إذا كانت  $0 = (m_1, ..., m_2)$  عينة عشوائية من التوزيع المنتظم (-7, 7), فأوجد:

ا. توزیع کل من المتغیرین س(۱) و س(ن).

٢. التوزيع المشترك لـ س (١) و س (٢).

۳. توزیع وسیط العینة m بافتراض أن ن عدد فردي.





- - التوزيع الاحتمالي لـ س= (س،، ...، سن).
    - ٢. التوزيع الاحتمالي لـ (س(١)، ... ، س(۵).
- ٣. التوزيع الاحتمالي لكل من المتغيرين س(١) و س(ن شم احسب متوسط وتباين كل منهما.
- التوزيـــع الاحتمـــالي لكـــل مــن المـــدى ح= س(ن-س(۱)
   وتصف المدى ت.
- ١١ إذا كانت س= (س،، ... ، س،) عينة عشوائية من التوزيع ٦ (٣٠٠ ٣) فأوجد متوسط وتباين كل من المتغيرات الآتية:
  - ١+٤٢=ن ٤ (١+٤)س د(١)س-(۵)س د (۲٠١٠) ٢
- - ١. التوزيع الاحتمالي س(ن)-س(١).
  - التوزيع الاحتمالي لوسيط العينة س.
  - التوزيع الاحتمالي لـ ح=س(ن)-س(۱).





١٣- إذا كانت س = (س١، س٢) عينة عــشوائية مــن التوزيــع الأســـي:
 س(س)= له مــله ٢ س > • فأوجد س١/ س٢.

۱۵- إذا كانت  $w = (w_1, w_7)$  عينة عشوائية من التوزيع المنتظم  $(v_1, w_7)$  وكانت  $v_1 = (w_1, w_7)$  العينة المرتبة الموافقة لـ  $v_2 = (w_1, w_7)$  التوزيع الشرطى لـ  $v_3 = (w_1, w_7)$ 

وكانت ص١، ... ، صن الإحصاءات المرتبة الموافقة لـ س، فأوجد:

١. متوسط وتباين ص--س.

 $\frac{\alpha_{\gamma}-\alpha_{\gamma}}{\gamma}$  . متوسط وتباین

٣. توزيع وسيط العينة س.

١٦- إذا كانت س= (١٠٥٠ ... ، سن) عينة عشوائية من توزيع ق(س)، وكانت العزوم المركزية (حول المتوسط) من المرتبة ٢ر لهذا التوزيع موجودة، قائبت أن:

$$\left(\frac{1}{\gamma_{\mathcal{Q}_{i}}}\right)^{+} + \left[M_{\gamma_{i}} - M_{\gamma_{i}}^{\gamma} - \left(M_{\gamma_{i}} M_{\gamma_{i}} + \mathcal{Q}_{i} M_{\gamma_{i}} + \mathcal{Q}_{i} M_{\gamma_{i}} \right) - \gamma_{i} M_{\gamma_{i}} + \frac{1}{\mathcal{Q}_{i}} + \frac{1}{\mathcal{Q}_{$$

۱۷ - إذا كانست س= ( $(m_1, ..., m_o)$  و  $m_0 = ((m_1, ..., m_o))$  و منستين مشتقلتين مأخوذتان من التوزيع  $(m_1, m_o)$  و  $(m_1, m_o)$  و  $(m_1, m_o)$  ملى التربيب، فاثبت أن توزيع المتغير العشوائي:





$$\frac{\left(\begin{smallmatrix} \mu_{-1}\mu \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} \nu_{-1}\nu \end{smallmatrix}\right)}{\left(\begin{smallmatrix} \tau^*_{-1}\mu \end{smallmatrix}\right) + \begin{smallmatrix} \tau^*_{-1}\mu \end{smallmatrix}\left(\begin{smallmatrix} \nu_{-1}\nu \end{smallmatrix}\right)} \left(\begin{smallmatrix} \tau^*_{-1}\mu \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} \tau^*_{-1}\mu \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} \tau^*_{-1}\mu \end{smallmatrix}\right)} \left(\begin{smallmatrix} \tau^*_{-1}\mu \end{smallmatrix}\right)$$

يتبع توزيع م(ن-٢)، حيث إن:

$$A_{i}^{a} = \frac{1}{C_{i} - I} \sum_{j=1}^{C_{i}} \left( \omega_{ij} - \overline{\omega_{j}} \right)^{\gamma}$$
 e.  $A_{i}^{a} = \frac{1}{C_{i} - I} \sum_{j=1}^{C_{i}} \left( \omega_{ij} - \overline{\omega_{j}} \right)^{\gamma}$ 

۱۸ - إذا كانـت لـدينا عينـة عـشوائية س بحجـم (ن = ۲م+۱) مـن توزيـع
 ۲ - ۱۸ فاثبت أن وسيط هذه العينة له توزيع ب(م+۱، م+۱).

۱۰ با ليكن ع متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الأسي:  $v = \frac{1}{7} = \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$ 

سحبت عينة عشوائية بمحجم ن=١٠ من هذا التوزيع فكانــت علـى النحــو الآتى:

T . \* , T . Y , Y . \* , T . \* , O . E . \* , Y . O . T . 1

أوجد قيمة الإحصاء د = قيمةعظمى إن (س)-ق(س)

۲۱ – إذا كانت  $m = (m_1, ..., m_6)$  عينة عشوائية من توزيع مستمر دالـة توزيعه:



# مقاییس انتشتت Measures of dispersion



## الفصل الثالث

## مقاييس التشتت Measures of dispersion

#### إذا قمنا بحساب الوسط الحسابي لجموعة السانات الآتية:

			¥		
4,0	٧,٥	0,0	٣,٥	مركز المجموعة	
0	٧	7"	0	التكرار	

#### وكذلك لمجموعة البيانات:

11,0	4,0	٧,٥	0,0	4,0	مركز المجموعة
Y	١	٨	٥	٤	التكرار

لوجدنا أن كلاً من هاتين المجموعتين من البيانات لهما نفس قيمة الوسط الحسابي س ٦٫٧٣.

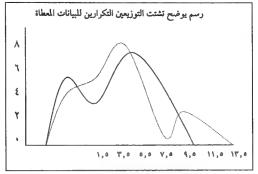
وبالنظر إلى المنحنيات التكرارية لهما الموضحة بالشكل الذي أمامك، لوجدنا أن هناك اختلاف واضح وبينهما فهناك منحنى أقبل اتساعاً من الآخر وهذا يدعونا إلى البحث عن مقياس آخر يكنه قياس الدرجة التي تميل بها البيانات للانتشار حول قيمة الوسط وهو ما يسمى بالتشتت. ومقايس التشتت نقسمها إلى أربع أنواع هي:

#### ۱- المدى Range

Y - نصف المدى الربيعي أو المتغير الربيعي ( Semi-Inter Quartile ) - ٢-







٣. الانحراف المتوسط (The Mean Deviation)

التباین ومعامل الاختلاف (Variance and Coefficient of variation)
 وسوف نقوم بشرح كل منها على حدة.

## أولاً: المدى Range

وهو أبسط وأسهل مقاييس التشتت فإذا كانت لـدينا مجموعة من البيانات سر١، س٢، س٠، سن فإن المدى هو الفرق بين القيمة العظمى للبيانات ولتكن سمندى والقيمة الصغرى للبيانات ولتكن هي سسدى والمكن كتابته بالصورة:

المدى = سمندى - سمنرى

كذلك إذا كانت البيانات مبوبة فإننا نستبدل القيمة العظمى للبيانات بالحله





الفعلي للمجموعة العليا والقيمة الصغرى بالحد السفلي للمجموعة الدنيا وبالتالي فإن المدى لبيانات مبوبة يعطى كالآتي:

المدى = الحد الأعلى الفعلي للمجموعة العليا – الحد الأدنى الفعلي للمجموعة الدنيا

واضح أن قيمة المدى تعتمد على القيم الطرفية أو الحدية للبيانات.

فإذا نظرنا إلى الشكل السابق لوجدنا أن المدى يعبر صن طول اتساع فتحة المنحنى إلى أسفل وهو ما يسمى بمنطقة الرسم أو يمدى القيم وهي المنطقة التي تتواجد فيها جميع البيانات.

مثال (١):

أوجد مدى البيانات الآتية: ٢، ٣، ٥، ٦، ٨، ١٠، ١٢، ١٢.

الحل:

المدى = سمظمى - سمنرى

= 71-7=3

حيث س مطم هي القيمة العظمى و س منى هي القيمة الـصغرى لهـذه البيانات.

مثال (٢):

أوجد مدى البيانات الآتية: ٢، ٣، ٥، ٢، ٨، ١٠، ١١٦.

الحل:

المدى = س<sub>مظمى</sub> -- س<sub>استرى</sub>

- 111-Y= 311





ملحوظة: في المثالين السابقين لاحظ تأثر المدى بالقيم المتطرفة.

#### مثال (٣):

### أوجد مدى البيانات الآتية:

A4-A+	٧٩-٧٠	79-71	09-00	٤٩-٤٠	المجموعات
٤	11	10	٧	٤	التكرار

#### : الحار:

المدى = الحد الأعلى الفعلي للمجموعة العليا - الحد الأدنى الفعلي للمجموعة الدنيا

وفي أغلب الأحيان يراد عمـل مقارنـة بـين تــوزيعين لهــم وحــدات مقيــاس مختلفة لـذا نلجأ لما يسمى باسم المعامل أو القياسات النسبة ومنها المدى النسبي.

### تمريف معامل المدى Coefficient range

يعرف معامل المدى أو المدى النسبي بأنه النسبة:

### مثال (٤):

أوجد المدى النسي للبيانات في المثال السابق.

#### الحل:

يعطى المدى النسبي بالصورة: المدى النسبي المسي المسورة: المدى





وبالتعويض بالحد الفعلي الأعلى للمجموعة الأخيرة والحد الأدنى الفعلي للمجموعة الأولى فإن المدى التسبي هو:

#### # مميزات المدى:

١- يسهل فهمه وحسابه.

٢- يعطى فكرة سريعة عن طبيعة البيانات المعطاة.

#### # عبوبه:

١- يعتمد في حسابه على قيمتين فقط ويترك بقية القيم.

٧- يتأثر بالقيم المتطرفة.

## ثانياً: نصف المدى الربيمي أو التغير الربيمي

#### Semi-inter quartile deviation

يعرف نصف المدى الربيعي بأنه نصف الفرق بين الربيع الثالث رم والربيع الأول رر ويعطى بالصورة:

$$C = \frac{1}{4}(C^4 - C^4)$$

وفي معظم الأحوال نجد أن ٥٠٪ من البيانات تقع بـين الربيـع الأول ر، والربيع الثالث ر، وياستبعاد أجزاء البيانات المتطرفة التي تقع قبـل ر، وبعـد ر، فإننا نجد أن قيمة نصف المدى الربيعي تزداد بزيادة تشتت ٥٠٪ من البيانات التي تقع حول الوسط الحسابي وتقل قيمته بزيادة تركيزها وانتظامها.





وكما عرفنا نصف المدى الربيعي يمكننا تعريف نصف المدى العشيري وذلك باستبدال ر، بع، واستبدال ر، بع، ويمكن أيضاً بالمثل تعريف نصف المدى المثيني.

\* تعريف معامل الاختلاف الربيعي Coefficient quartile deviation

يعرف معامل الاختلاف الربيعي بأنه النسبة:

معامل الاختلاف الربيعي= $\frac{(-1)^2}{(-1)^2}$ 

مثال (٥):

#### احسب معامل الاختلاف للبيانات الآتية:

المجموع	74-7.	09-0.	89-81	44-4.	79-7.	19-10	درجات الرياضيات
۸۰	٥	1.	40	77	1+	A	عدد الطلاب

#### : الحل:

ن = ٨٠ هو عدد البيانات نقوم بتكوين الجدول التكراري المتجمع الـصاعد

## كما يلي:

التكرار المتجمع الصاعد لعدد الطلاب	أقل من الحدود الدنيا للمجموعة
•	أقل من ٥ ، ٩
٨	أقل من ١٩٥٥
١٨	أقل من ٢٩,٥
£ +	أقل من ۲۹٫۵
10	أقل من ٥ , ٤٩
٧٥	أقل من ٥٩٫٥
۸۰	أقل من ٦٩,٥



۱. لحساب ر، فإننا نوجد ترتيبه وهو  $\frac{\dot{v}}{2} = \frac{\Lambda}{2} = \Upsilon - 1$  وعليه فإن:

۲. بالمثل لحساب رم فإن ترتيبه هو 
$$\frac{\gamma v}{2} = \frac{\gamma \times \Lambda \cdot X}{2} = 1$$
 وبالتالي فإن:

eals 
$$c_{\gamma} = \frac{1}{2} \frac{\frac{\gamma_{i}}{2} - \delta_{i}}{\delta_{\gamma} - \delta_{i}}$$
 at  $\frac{1}{2}$  is  $c_{\gamma} = c_{\gamma} + \frac{1}{2} \cdot \frac$ 

وبالتالي فإن معامل الاختلاف الربيعي هو
$$\frac{\sigma_{1,2+2,0}}{\sigma_{1,2+2,0}} = \gamma_{1,2}$$

# \* عميزات نصف المدى الربيعي أو التغير الربيعي:

١- يسهل فهمه وحسابه.

٧- لا يتأثر بالقيم المتطرفة.

٣- يسهل حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.

#### \* عبويه:

- ١- لا يعتمد في حسابه على جميع القيم المعطاة وبالتالي فهـو لا يمثلـها تمثيـل
   جيد.
  - ٧- لا يمكن التعامل معه في المعالجات الجبرية.





# ثَالثاً: الانحراف التوسط The mean diviation

#### أ) الانحراف المتوسط لبيانات غير مبوية

يعرف الانحراف المتوسط لمجموعة من القيم غير المبوبة ولتكن س، ، س، m m m ، m m ، m ، m المواقت المطلقة لهذه القيم عن الوسط الحسابي m ، أي أنه يساوى:

$$|\mathbf{V}| = \frac{1}{1} \sum_{j=1}^{n} \tilde{\mathbf{E}}_{i,j} |\mathbf{v}_{i,j} - \mathbf{v}_{i,j}|$$

وبإيجاد متوسط هذه القيم نجد أنه يساوي 🕺 هو الانحراف المتوسط.

# ب) الانحراف المتوسط البيانات المبوية

يعرف الانحراف المتوسط لمجموحة من البيانات المبوبة مراكز مجموعاتها هي سر، سر، سر، س.، سم ويتكرارات مشاظرة هي ق،، ق،، ق،، ق، بائمة متوسط الخيرافات المطلقة لهذه المراكز عن الوسط الحسابي س، أي أنه يساوي:

$$|V_{0}| = \frac{1}{|V_{0}|} \sum_{j=1}^{n} |V_{0j}| = \frac{1}{|V_{0j}|}$$





حيث ن= کُي قي.

ويمكن كتابة المقدار دروس - س للتبسيط.

 $|V_{z}|_{z}$  الانحراف المتوسط =  $\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}$ ق المتوسط

مثال (٦):

### أوجد الانحراف المتوسط للبيانات الآتية:

99-9	٠ ٨٩	-A•	V4-V+	79-70	09-00	£9-E+	الجموعات
١	T	۲	11	10	٩	۲	التكرار

#### : [4

# نكون الجدول الآتي:

ق  د	د=س-س	قس	التكرار ق	مراكز المجموعات س
٤٢,٥	Y1,Y0-	۸۹	Y	88,0
1+1,70	11,40-	٤٩٠,٥	٩	08,0
۱۸,۷۵	١,٢٥-	977,0	10	78,0
47,70	۸,۷٥	۸۱۹,۵	11	Y£,0
٣٧,٥	14,70	179,+	Y	A£,0
44,40	YA, Y0	98,0	١	48,0
440		777.	٤٠	الجموع

الوسط الحسابي هو:
$$-\frac{1}{\omega} + \frac{1}{2} = 0$$
 الوسط الحسابي هو:

70, Yo = Y77.

- 18T



وبالتالي فإن الانحراف المتوسط هو:

 $=\frac{1}{i}\sum_{i=1}^{n}\tilde{v}_{i}|c_{i}|$ 

A,170= TTO

### رابعاً: التباين ومعامل الاختلاف

#### The variance and coefficient of variation

أ) التباين: يعتبر كل من التباين والانحراف المعياري وجهان لعملة واحدة ويعتبر كل منهما من أهم المقاييس الإحصائية والشائعة الاستخدام سواء في الإحصاء الوصفي أو الاستدالي والعلاقة التي تربط التباين بالانحراف المعياري تجعلنا نتحدث عن أحدهم ويكون للثاني نفس الخصائص. فالتباين هر مربع الانحراف المعياري وهو مقياس لمدى تباعد وتقارب البيانات من بعضها البعض فكلما صغرت قيمته دل ذلك على انتظام وانسجام وتقارب القيم والعكس كلما زادت قيمته كان دليل على تشتت هذه القيم.

يعرف التباين بأنه متوسط مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي لها. ويرمز له بالرمز σ أو نكتب الحروف الأولى من الكلمات المكونـة لـه باللغـة الإنجليزية كالآتي تباين (س) حيث س تعنى الظاهرة تحت الدراسة.

أي أن:

√ نباین اس) ا





# أ) التباين والانحراف المياري لبيانات غير مبوية

وإذا كان لدينا مجموعة من القيم غير المبوبة ولتكن:

س١٠ س٢٠ س٢٠ س٠٠ سن لها الوسط الحسابي س فإن التباين لها هو:

تباین (س)  $= \frac{1}{1} \sum_{i=1}^{N} (v_i - \overline{v_i})^i$  و یکن تبسیط صورة التباین السابقة کالآتي:

$$inly (w) = \frac{1}{i} \sum_{v=1}^{i} w_v^{\gamma} - \frac{\gamma_{vv}}{i} \sum_{v=1}^{i} w_v + \frac{iv^{\gamma}}{i} \sum_{v=1}^{v} r$$

$$=\frac{1}{C}\sum_{k=1}^{C}\omega_{k}\sum_{v_{k}}^{T}-\left(\frac{\sum_{k=1}^{C}\omega_{k}}{C}\right)^{T}=\frac{1}{2}\sum_{v_{k}}^{T}-\left(\frac{1}{2}\sum_{v_{k}}^{T}\right)^{T}$$

#### مثال (٧):

أوجد الانحراف المعياري والتباين للقيم الآتية: -١٠، ٥، ٥، ١٠، ٢٥، ٣٠

## الحل:

د۲	د=س-س	س
2	۲	11-
100	1	
Yo	0-	0
•		1+
770	10	Yo
2	٧.	۳٠
110.		يُّ پيتا سي=٦٠



$$\frac{1}{m} = \frac{1}{0} \sum_{i=1}^{n} m_{ij} = \frac{1}{1} = -1$$

وبالتالي فإن التباين هو: تباين (س)  $=\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{n} c_{j}^{*}=\frac{1}{r}=1,77$ 

وبالتالي فإن الانحراف المعياري هو:

ت تباین (س) = ۱۳,۸٤ = σ

ويمكن إيجاد نفس النواتج باستخدام الصور المباشرة الآتية:

$$191,77 = \sqrt{\frac{7}{7}} - \frac{170}{7} = \sqrt{(\omega)} - \frac{7}{2} = \sqrt{5}$$

ب) التباين والانحراف المعياري لبيانات مبوبة

إن كان لدينا مجموعة من البيانات المبوية مراكز مجموعاتها همي س،، س،، س،، س، يتكرارات متناظرة همي ق،، ق،، ق،، ق،، ق، ولهما الوسط الحسابي س، فإن التباين لهذه البيانات هو:

$$\ddot{\psi}_{ij}(\omega) = \frac{1}{\dot{\omega}} \sum_{i=1}^{n} \tilde{e}_{ij} \left( \omega_{ij} - \overline{\omega_{i}} \right)^{\gamma} \quad , \qquad \dot{\omega} = \sum_{i\neq j} \tilde{e}_{ij}$$

ويمكن تبسيط الصورة السابقة كما صبق في حالة البيانات غير المبوبة كالآتي:

$$\bar{r}_{\mu} |_{y_{0}^{i}} (\omega_{0}) = \frac{1}{c} \sum_{v=1}^{n} \bar{\epsilon}_{v_{0}} \omega_{v_{0}}^{v_{0}} - \left( \frac{\sum_{v=1}^{n} \bar{\epsilon}_{v_{0}} \omega_{v_{0}}}{c} \right)^{v_{0}}$$





# هي مجموع التكرارات.

#### مثال (٨):

# أوجد الانحراف المعياري والتباين لمجموعة البيانات:

A4-A+	V4-V+	19-10	04-04	19-11	44-4.	Y4-Y+	الدرجات
٣	7	۱۲	18	۱۸	14	٤	عدد الطلاب

### الحل:

قىس ي	فيسي	التكرار قي	المراكز سي	الجموحات
78.1	4.4	٤	Y£,0	Y9-Y+
10844,40	££A,0	۱۳	38,0	79-7.
70722,0	A+1	١٨	٤٤,٥	٤٩-٤٠
£10AT,0	٧٦٣	18	08,0	04-01
27223	YYE	17	78,0	79-7.
777.1,0	£ { Y	7	٧٤,٥	V4-V+
Y127+, Y0	Y0 <b>7</b> ,0	٣	٨٤,٥	14-A+
کُر کیس س ع = ۰٫۷3۲۴۹۱	کُ پیانی س <sub>ی</sub> = ۸۰۵۳	کُون =۲۰		المجموع

# وبالتالي فإن التباين هو:

$$\ddot{r}_{\mu} |_{\Sigma'} \left( \omega_{U} \right) = \frac{1}{\dot{\upsilon}} \left( \sum_{v=1}^{n} \tilde{c}_{v_{v}} \omega_{v_{v}}^{T} - \frac{\left( \sum_{v=1}^{n} \tilde{c}_{v_{v}} \omega_{v_{v}} \right)^{T}}{\dot{\upsilon}} \right)$$





$$\text{YT.,} \text{T=} \left(\frac{\text{`(roko)}}{\text{V.}} - \text{ITIVEV,o}\right) \frac{1}{\text{V.}} =$$

ومنها فإن الانحراف المعياري هو ٥٥ ٢٣٠,٦٣٠ = ١٥,١٩

ملحوظة: تسمى الطريقة السابقة بالطريقة المباشرة ويعيب على هذه الطريقة صعوبة الحسابات وطول الوقت المستغرق فيها عندما تكون البيانات كبيرة.

### خصائص التباين والانحراف المياري

 إضافة أو طرح أي عدد حقيقي ثابت من جميع البيانات لا يؤثر على قيمة التباين أو الانحراف المعياري.

وعند استخدامنا لهذه الخاصية فإن الطريقة المتبعة تسمى بالطريقة المختصرة.

أي بفرض أن أ هو وسطاً فرضياً لظاهرة ما س فإن:

البرهان:

نستخدم تعريف التباين فإن:

وباستخدام خصائص الوسط الحسابي فإن:

$$\forall +\overline{w} \mid Y \pm \overline{w} \mid -\overline{(w' \pm Y \mid w + \overline{w})} = (\overline{w' \pm Y \mid w + \overline{w}})$$





 عند قسمة جميع البيانات على عدد ثابت لا يساوي الصفر (يكون في الغالب طول الجموعة) فإن قيمة التباين للبيانات القديمة يساوي قيمة التباين للبيانات الجديدة مضرباً في مربع هذا العدد.

تباین 
$$\left(\frac{1+m}{m}\right) = \frac{1}{m}$$
 تباین (س).

البرهان:

$$\frac{\mathbf{V}}{\left(\frac{\mathbf{I} \pm \mathbf{U}^{n}}{\mathbf{A}}\right) - \mathbf{V}} \left(\frac{\mathbf{I} \pm \mathbf{U}^{n}}{\mathbf{A}}\right) = \left(\frac{\mathbf{I} \pm \mathbf{U}^{n}}{\mathbf{A}}\right) \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \mathbf{V}$$

$$\mathbf{V}\left(\mathbf{I} \pm \frac{\mathbf{U}^{n}}{\mathbf{V}}\right) \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} - \left(\mathbf{V} + \mathbf{U}^{n} + \mathbf{V} + \mathbf{V}^{n}\right) \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \mathbf{I}$$

وباستخدام خصائص الوسط الحسابي فإن:

$$\begin{split} \tilde{\tau}_{1} & \underbrace{\downarrow \downarrow \downarrow}_{A} = \frac{1}{A} \underbrace{-\frac{1}{A} \cdot \left( \overline{u} + \overline{v} - \overline{v} \right) \cdot \left( \overline{v} + \overline{v} - \overline{v} \right) \cdot \left( \overline{v} + \overline{v} - \overline{v} - \overline{v} \right) \cdot \left( \overline{v} + \overline{v} - \overline{v} - \overline{v} \right) \cdot \left( \overline{v} - \overline{v} - \overline{v} - \overline{v} \right) \cdot \left( \overline{v} - \overline{$$

ملحوظة: وتسمى الطريقة التي تستخدم هاتين الخاصيتين السابقتين أي طرح عدد ثابت من جميع البيانات يسمى بالوسط الفرضي ثم قسمة الناتج على عدد الثابت بالطريقة المختزلة.

وهذه الطريقة تستخدم للتغلب على مشكلة تـضخم الأرقـام وصعوبة \_\_\_\_



الحسابات. لوحظ في المثال السابق كبر الأرقـام وتـضخمها لـذا سـوف نقــوم في المثال القادم بتوضيح عمل الطريقة المختزلة.

٣. قيمة التباين لأي ظاهرة قيمة غير سالبة دائماً أي أن تباين (س) ≥٠

البرهان: يترك للطالب.

 إذا كانت جميع قيم الظاهرة ثابتة أي متساوية فإن التباين لهـذه الظاهرة يساوى صفر.

البرهان: إن الوسط الحسابي لكمية ثابتة يساوي نفس هذه الكمية الثابتة وبالتالي إذا كانت جميع قيم الظاهرة س ثابتة وتساوي جـ فإن:

س≔ جـ

٥. إذا كان للدينا مجموعتان حجمهما ن، و ن و ولهما الأوساط الحسابية  $\overline{\psi}$ , و  $\overline{\psi}$  و  $\overline{\psi}$  على الترتيب فإن التباين المشترك لهما هو:  $\overline{\psi}$  =  $\frac{\dot{\psi}}{\dot{\psi}}$  +  $\frac{\dot{\psi}}{\dot{\psi}}$  -  $\frac{\dot{\psi}}{\dot{\psi$ 

ويسساوي  $\sigma' = \frac{\dot{v}_{\gamma}\sigma_{\gamma}\dot{v} + \dot{v}_{\gamma}\sigma_{\gamma}\dot{v}}{\dot{v}_{\gamma}\dot{v}_{\gamma}\dot{v}}$  عندما تتسساوى الأوسساط الحسسابية للمجموعين.

البرهان: بفرض أن قيم المجموصة الأولى هي س١، س٢، ...، س١٥ وقيم المجموعة الثانية هي ص١، ص٢، ...، ص١٥ فإن التباين المشترك لهما هو:



$$\begin{split} \boldsymbol{\nabla}^{T} &= \frac{1}{\dot{\boldsymbol{U}}_{f} + \dot{\boldsymbol{U}}_{T}} \left( \sum_{q = 1}^{M_{f}} (\boldsymbol{u}_{Q_{g}} - \boldsymbol{u}_{Q})^{T} + \sum_{q = 1}^{M_{f}} (\boldsymbol{\omega}_{Q_{g}} \boldsymbol{u}_{Q})^{T} \right) \\ & \sim & = \frac{1}{\dot{\boldsymbol{U}}_{f} + \dot{\boldsymbol{U}}_{T}} \left( \sum_{q = 1}^{M_{f}} \boldsymbol{u}_{Q_{g}} + \sum_{q = 1}^{M_{f}} \boldsymbol{\omega}_{Q_{g}} \right) \end{split}$$

وبفرض أن در=س ب س ، در=س ، فإنه بإضافة وطرح ومسطي المجموعين إلى قيم سي، صي فإن التباين المشترك يمكن كتابته على الصورة:

$$\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{1}{\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\gamma}} + \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\gamma}}} \left( \sum_{k=1}^{U_{\boldsymbol{\gamma}}} \left( \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\gamma}}} - \overline{\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\gamma}}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{\gamma}} \right)^{\boldsymbol{\gamma}} + \sum_{k=1}^{U_{\boldsymbol{\gamma}}} \left( \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\gamma}}} \cdot \overline{\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\gamma}}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{\gamma}} \right)^{\boldsymbol{\gamma}} \right)$$

وبفك الأقواس المربعة واستخدام خصائص الوسط الحسابي فإن الناتج يصبح على الصورة:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\gamma} = \frac{1}{\dot{\boldsymbol{c}}_{\gamma} + \dot{\boldsymbol{c}}_{\gamma}} \left( \sum_{v=1}^{\dot{\boldsymbol{c}}_{\gamma}} \left( \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{c}_{V_{v}}} - \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{c}_{V_{v}}}^{-\gamma} \right)^{\gamma} + \sum_{v=1}^{\dot{\boldsymbol{c}}_{\gamma}} \left( \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{c}_{V_{v}}} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{c}_{V_{v}}}^{-\gamma} + \dot{\boldsymbol{c}}_{\gamma}, \boldsymbol{c}_{\gamma}^{\gamma} \right) \right)$$

والذي يمكن كتابته كالأتي:

$${}_{\gamma}\dot{U} + {}_{\dot{\gamma}}\dot{U} \cdot \overline{U^{\alpha}} - \overline{U^{\alpha}} = {}_{\dot{\alpha}}\dot{U} \cdot \frac{{}_{\gamma}\dot{U} + {}_{\gamma}\dot{U} + {}_{\gamma}\dot{U} + {}_{\gamma}\dot{U}}{\gamma \dot{U} + {}_{\dot{\gamma}}\dot{U} + {}_{\dot{\gamma}}\dot{U} + {}_{\dot{\gamma}}\dot{U}} = {}_{\gamma}\sigma$$

ولمجد أن الحد الأخير يساوي صفراً عندما تتساوى الأوساط الحسابية للمجموعين أي س, = س, حيث سنجد أن:

$$\begin{split} & \stackrel{-}{\omega_{r}} = \frac{1}{\dot{\omega_{r}} + \dot{\omega_{r}}} \left( \sum_{\upsilon_{r}=1}^{\dot{\omega_{r}}} \omega_{\upsilon_{\upsilon_{r}}} + \sum_{\upsilon_{r}=1}^{\dot{\omega_{r}}} \omega_{\upsilon_{\upsilon_{r}}} \right) = \frac{1}{\dot{\omega_{r}} + \dot{\omega_{r}}} \left( \dot{\omega_{r}} \frac{\omega_{r}}{\omega_{r}} + \dot{\omega_{r}} \frac{\omega_{r}}{\omega_{r}} \right) \\ & = \frac{(\dot{\omega_{r}} + \dot{\omega_{r}})^{2}}{\dot{\omega_{r}} + \dot{\omega_{r}}} \frac{1}{\omega_{r}} \frac{1}{\omega_{r}} \frac{1}{\omega_{r}} \left( \dot{\omega_{r}} \frac{\omega_{r}}{\omega_{r}} + \dot{\omega_{r}} \frac{\omega_{r}}{\omega_{r}} \right) + \frac{1}{\omega_{r}} \frac{1}{\omega_{r}}$$



ومنها فإن د١= د٢ = ١

 $\frac{\sqrt[3]{\sigma_{\gamma}\dot{\upsilon}} + \sqrt[3]{\sigma_{\gamma}\dot{\upsilon}}}{\sqrt[3]{\upsilon} + \sqrt[3]{\upsilon}} = \sqrt[3]{\sigma_{\gamma}\dot{\upsilon}} + \sqrt[3]{\sigma_{\gamma}\dot{\upsilon}}$ 

مثال (٩):

أوجد الانحراف المعياري والتباين لمجموعة البيانات في المثال السابق باستخدام الطريقة المختزلة.

#### الحل:

نقوم باختيار وسط فرضي بتوسط مجموعة البيانات لتسهيل العملية الحسابية وليكن أ=0, \$0 وطرحه من جميع مراكز المجموعات ثم قسمة الناتج على طول المجموعة هـ = 10 ووضع الناتج  $\frac{w-1}{a}$  في العمود الرابع من المجمول السلام أمامك.

قىيد كي	ڦهڻي	لى= <u>س-م,30</u>	التكرار قىي	المراكز سي	المجموعات
77	17-	4-	٤	78,0	Y4-Y•
٥٢	-77	٧-	14	48,0	44-4.
1.4	۱۸-	1-	14	٤٤,٥	٤٩-٤٠
1	1		18	01,0	04-01
17	17	١	17	78,0	79-70
3.4	14	Y	7	٧٤,٥	V4-V+
77	٩	٣	4	A£,0	A9-A+
کُن <sub>و</sub> در = ۱۲۹	∑ 6, 6, =-77	_	کُرنی=۲۰		المجموع



بفرض أن القيم الجديدة هي للظاهرة  $\omega = \frac{\omega - 6,0^{\circ}}{1}$  وبالتالي فوان التباين لمذه البيانات الجديدة هو:

$$\frac{1}{v}$$
تباین (ص) =  $\frac{1}{v}$  کُیِ قہ د  $\sqrt{-\frac{(\sum_{i=1}^{r} \tilde{b}_{i}, c_{i})^{T}}{v}}$ 

وبالتعويض من الجدول السابق فإن:

$$Y, \forall Y, \forall Y = \left(\frac{Y(YY-)}{Y} - 179\right) \frac{1}{Y} \quad (0)$$

ومنها فإن التباين للبيانات القديمة هو:

ومنها فإن الانحراف المعياري لها هو ع= ٢٣٠,٦٧

ب) معامل الاختلاف

يعرف معامل الاختلاف بأنه مقياس نسبي للتشتت ويعطى بالصيغة الآتية:

معامل الاختلاف=
$$\frac{\sigma}{\omega}$$
×۱۰۰۰

حيث σ، σ هما الانحواف المعياري والوسط الحسابي للبيانات المعطاة على الترتيب.

ومعامل الاختلاف هـ و دائماً نسبة مثوية وهـ و مقياس لا يعتمـ على الوحدات المستخدمة في القياس لذلك غالباً ما يستخدم هـ ذا المقياس للمقارنة





بين تفاوت مجموعتين غتلفتين من البيانات وعادة لا يكون لهمـا نفـس وحـدات القياس مثل الطول والوزن.

مثال (۱۰):

أوجد معامل الاختلاف لمجموعة البيانات في المثال السابق.

### الحل:

في المشال السعابق وجمدنا أن الانحسراف المعيساري لمجموصة البيانسات هـو ٣٣٠,٦٧ = ١٩,١١ وأن الوسط الحسابي لها هو:

وبالتعويض من الجدول السابق فإن:

وعليه فإن:

معامل الاختلاف 
$$=\frac{\sigma}{m}$$

#### مثال (۱۱):

إذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري لمجموعة مـن البيانــات حجمهــا ١٠٠ هما على الترتيب ١٢٠ و٥ ومجموعة أخــرى مكونــة مـن ١٢٠ لهــا اســط



Contain Justin

الحسابي ١٠٠ والانحراف المعياري ٤ أوجد الوسط الحسابي المشترك والتباين المشترك ثم وضح أي منهما أكثر تشتت من الأخرى.

#### الحل:

لدينا للمجموعة الأولى 
$$\sigma_1 = 0$$
، من  $\sigma_2 = 0$ ، ن  $\sigma_3 = 0$ 

وللمجموعة الثانية  $\sigma$ = ٤،  $\overline{\omega_{v}}$  = ١٠٠، ن $\sigma$ = ١٢٠

وبالتالي فإن الوسط الحسابي المشترك هو:

س=۱،۹٫۱

والآن نوجد التباين المشترك د١= ١٠٩,١-١١-١

كذلك دې = ۱۰۹, ۱-۱،۰ و يكون التباين المشترك هو:

$$\overline{Q^{\mu}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \epsilon \qquad \qquad \frac{\sqrt{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة فإن:

$$\frac{{}^{\mathsf{Y}}(\mathfrak{q}, \mathsf{I}-) {}^{\mathsf{Y}}(\mathfrak{q}, \mathsf{$$

$$\frac{{}^{\mathsf{Y}}(q, \mathsf{I}_{\mathsf{A}}) {}^{\mathsf{Y}} {}^{\mathsf{$$

119, YV = 99, 1V + Y\*, 1 =



### معامل الاختلاف الجموعة الأولى هو:

معامل الاختلاف للمجموعة الثانية هو:

$$\chi_{\xi=1} \cdot \cdot \times \frac{1}{1+\epsilon} =$$

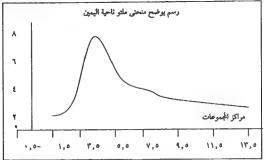
أي أن المجموعة الثانية أقل تشتت من المجموعة الأولى.

وهناك مقاييس يمكن بها معرفة الشكل التقريبي لمنحنى التوزيح التكراري ومنها مقاييس الالتواء ومقاييس التفلطح والعزوم. وسوف نقوم بشرح كل منها على حدة كما يلى:

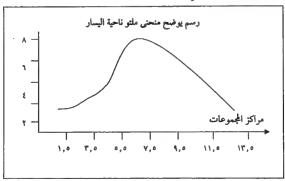
### # مقاييس الالتواء Measures of skewness

يقصد بكلمة التواء المنحنى هو نقص في تماثل المنحنى. وهـذا الـنقص نـاتج من عدم تماثل التوزيع التكراري للبيانات حول الوسط الحسابي، فالتواء المتحنى يعني أن أحد جوانب المنحنى أكبر من الجهة الآخرى ونقـول بـأن المنحنى ملتـو ناحية اليمين (موجب الالتواء) إذا الجزء الأكبر من المنحنى واقـم جهة الـيمين وفيها يكون الوسط الحسابي أكبر من الوسيط أو المنوال انظر الشكل الآتى:





والعكس نقول أنه ملتو ناحية اليسار (سالب الالتواء) إذا كان الجميزء الأكبر من المنحنى يقع جهة اليسار وفيه يكون الوسط الحسابي أقل من قيمة الوسيط والمنوال انظر الشكل الآتي:







وهناك مقاييس عديدة للالتواء الغرض منها معرفة اتجاه الالتواء وإلى أي

مدى يبعد هذا المنحنى عن التماثل:

المقياس الأول للالتواء = الوسط الحسابي - المنوال

وهذا يعتمد على موقع الوسط من المنوال ويمكن أن نرى أن معامل الالتواء الأول هو:

معامل الالتواء الأول= 
$$\frac{\overline{w} - \text{Maight}}{\sigma}$$

وإذا كمان المنحنى ملتو التمواء بمسيطاً فيمكن استخدام العلاقة: ر المراح الوسط المسابي)

وهناك معامل الالتواء الثاني يعتمد في حسابه على الربيعيات وهو:

مثال (۱۳):

## أوجد معامل الالتواء الأول للبيانات الآتية:

44A+	V9-V+	79-70	09-00	19-11	44-4.	Y4-Y•	الدرجات	
٣	٦	17	18	۱۸	14	٤	عدد الطلاب	l

#### الحل:

بإيجاد الوسط الحسابي س=١,٢١٥ والمنوال = ٤٠,٦١ والانحراف المعيـاري σ= ١٥,١٩ (كما سبق) والتعويض في المعامل الأول للالتواء فإن:





#### مثال (۱۳):

#### أوجد معامل الالتواء الثاني للبيانات الآتية:

79	-7.	09-04	14-11	<b>٣4-</b> ٣•	Y4-Y+	19-1+	الدرجات
	٥	1.	Yo	YY	1.	A	عدد الطلاب

### الحل:

# وبالتالي فإن:

معامل الالتواء الثاني = 
$$\frac{(-\tau_1 + (-\tau_1 - \tau_2))^2}{(-\tau_1 - \tau_1)^2} = \frac{(-\tau_1 + \tau_2 - \tau_1)^2}{(-\tau_1 - \tau_1)^2} = -\tau_2$$

وباستعراضنا للمثالين السابقين فإن الأول موجب الالتمواء أما الشاني فهمو سالب الالتواء.

### # العزوم Moments

في الفصل السابق قمنا بحساب الوسط للمجموعة من البيانات المبوبـة وخمير المبوبة وهذا الوسط يطلق عليه أحياناً العزم الأول للبيانات حول الصفر.

$$\overline{\psi} = M_{\ell} = \frac{\ell}{\dot{\omega}} \sum_{i=1}^{\ell} \tilde{c}_{ij} \psi_{ij} \qquad i = \sum_{i=1}^{\ell} \tilde{c}_{ij}$$

يعسرف العسزم الرائسي أو العسزم رقسم رحسول السعفر بالسعورة Mرعان المسعورة كُنُوسُ إِنْ السعورة المسعورة المستورة





أما العزم الراثي حول الوسط الحسابي لبيانات مبوبة فيعطى كالآتي:

$$M_{c} = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{3} \tilde{o}_{ij} \left( \omega_{ij} - \omega_{ij} \right)^{c}$$

واضح أن العزم الثاني حول الوسط الحسابي ما هو إلا التباين أي أن:  $^{\text{Y}}_{\sigma}$  =  $^{\text{Y}}_{\sigma}$ 

#### # التالطح Kurtosis

يعرف التفلطح بأنه استواء أو انبساط المنحنى التكراري عنـد المتوسط وتستخدم مقاييس التفلطح لمعرفة مدى استواء أو تدبب المنحنى التكراري لأي بيانات معطاة مقارنة بمنحنى يسمى المنحنى الطبيعي.

ومن مقاييس التفلطح الذي يعطى كالآتي:

$$\mathbf{A}_{\gamma} = \frac{\mathbf{M}_{\frac{1}{2}}}{\mathbf{M}_{\frac{1}{2}}}$$

حيث 
$$M_1 = \frac{1}{1} \sum_{i=0}^{n} \hat{o}_{ij} ( ov_{ij} - ov_{ij} )^{i}$$
 و  $M_{ij}^{*}$  هو مربع التباين.

وتسمى  $B_7$  بمقياس تحدب المنحنى وهو يساوي  $B_7$  " للمنحنى الطبيعي وإذا أدا كانت  $B_7 \leq T$  فإن المنحنى مستو وأقل تحدب من المنحنى الطبيعي وإذا كانت  $B_7 \geq T$  فإن المنحنى أكثر تحدب وتدبدب من المنحنى الطبيعى.

ويرجع الفضل لقوانين الالتواء التفلطح إلى العالم الفرنسي كـــارل بيرســـون karl pearson.





# تمارين

١- أوجد الاختلاف المتوسط والتباين لمجموعة البيانات الآتية:

9,0	٧,٥	0,0	٣,٥	مركز المجموعة
٥	٧	٣	٥	التكرار

### ٢- في دراسة لمرض سارس وجد أن:

	04-0+	84-8.	44-4.	79-7.	14-1:	العمر بالسنة
ľ	٣	٥	٧	٣	4	عدد الحالات

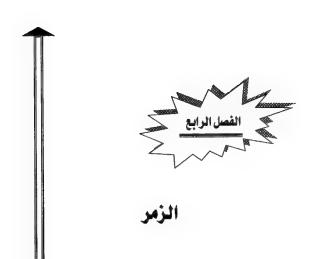
إحسب المدى- الإختلاف المتوسط- التباين وكذلك معامل الإختلاف لهذه البيانات.

٣- إذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري لجموعة من البيانات حجمها ١٠ هما على الترتيب ١٢ و ٥ وجموعة أخرى مكونة من ١٢ لها الوسط الحسابي ١٠ والانحراف المعياري ٤ أوجد الوسط الحسابي المشترك والتباين المشترك ثم وضع أي منهما أكثر تشتت من الأخرى.

٤- إذا كان الوسط الحسابي لكلا الجموعتين متساوي والانحراف المعياري للمجموعة الأولى هو ٥ وعددها ١٠ للمجموعة الثانية الانحراف المعياري لها هو ٤ وعددها ١٥ أوجد التباين المشترك.

البيانات الآتية هي نتائج طالبين في ٤ اختبارات اختبر أي الطالبين أكثر
 تثابت وملاءمة من الآخر.







# الفصل الرابع الزمسر Groups

الجبر هو دراسة غتلف الأنواع من الأنظمة المجردة، وإحدى هذه الأنظمة الأساسية هو النوع المعروف بالزمر والذي نتناوله بالدراسة في هذا الفصل، وفكرة الزمرة هي فكرة مشتركة في كثير من فروع الرياضيات نصادفها في التحليل والتبولوجي والمنطق الرياضي وكذلك في المجالات التي تستخدم فيها الرياضيات أداة مثل الفيزياء، والكيمياء، المخ.

بدأت نظرية الزمر تأخذ مكانها منذ نهاية القرن الثامن حشر وتمت دراسة الزمر ببطء في بادئ الأمر ولم يهتم بها إلا القليل وخصوصاً في العقد الأول من القرن التاسع عشر، وفجأة أخذت هذه النظرية قفزة هائلة وخصوصاً قبل وبعد ١٨٣٠ بسنوات قليلة وذلك في عمل جالوا (Galois) وآبيل (Abei) الذي يتعلق بقابلية المعادلات الجبرية للحل، وهذه القفزة شاركت مشاركة فعالة في تقدم الرياضيات.

الزمرة نظام جبري ذو عملية ثنائية واحدة تحقق خصائص معينة.

#### تعاریف وخواس أولیة

تعريف: إذا كانت ك مجموعة غير خالية و\* عملية ثنائية على ك، فإن (ك، \*) تسمى زمرة إذا تحققت الخواص التالية:

١- إذا كان أ، ب ∈ ك، فإن أ \* ب ∈ ك (خاصية الانغلاق).





٣- هناك عنصر هـ في ك حيث أن أ \* هـ= هـ \* أ لكل أ ∈ ك
 (العنصر هـ يسمى العنصر المجايد بالنسبة للعملية \*).

 $^{3}$  − k>ل عنصر  $^{4}$  ∈  $^{1}$  يوجد عنصر  $^{1}$  في  $^{2}$  حيث أن  $^{4}$  \*  $^{1}$  =  $^{1}$   $^{2}$  العنصر  $^{4}$  بالنسبة  $^{1}$  للعملة  $^{2}$  و يكتب  $^{1}$  =  $^{1}$   $^{1}$  =  $^{1}$  .

نعطى الآن بعض الأمثلة لتوضيح هذا التعريف.

#### مثال (١):

 ١- مجموعة الأعداد الصحيحة ص مع عملية الجمع الاعتيادية + تحقق الشروط المطلوبة في التعريف السابق.

إذا كان  $\{1, p \in \mathbb{R} \mid 1 \text{ distribution of the proof of the proof$ 

لكل عدد صحيح ﴿ هناك العدد الصحيح - ﴿ حيث أن:

إذن (ص، +) زمرة.

٢- مجموعة الأعداد الحقيقية ح مع عملية الجمع الاعتيادية + تحقق كـل
 الشروط المطلوبة لكي تكون (ح، +) زمرة.





 $\sqrt{-1}$  لنفرض أن ك =  $\{1, -1, 2, -2\}$  حيث  $2 = \sqrt{-1}$ , ولنفرض أن \* عملية ضرب الأعداد المركبة.

نستطيع تكوين الجدول التالي الذي يوضح أن (ك، \*) زمرة.

-ي	ي	1-	١	*
-ي	ي	1-	١	١
ي	-ي	١	1-	1-
١	1-	ي	ي	ي
1-	١	ي	-ي	-ي

#### مثال (٢):

لنفرض أن ك محموعة الأعداد القياسية الموجبة.

عرف العملية الثنائية \* على ك كما يلى:

$$| ^+ \psi = \frac{1, \psi}{7}$$
 لکل  $| ^+ \psi | \in \mathbb{R}^+$ .

لاحظ أن \* عملية مغلقة على ك وأن:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} = 2$$

$$\frac{1}{q} = \frac{\frac{1}{q} \cdot \frac{1}{q}}{q} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{q} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{q}$$

في هذا المثال العدد ٣ هو العنصر الحايد بالنسبة للعملية \*، أي أن:





7\*1= 1\*7=1 にとし、1 ∈ で、

وأخيراً:

 $f^{*} = \frac{\rho}{f} = \frac{\rho}{f} f = 0$  وهذا يعني أن  $f^{-} = \frac{\rho}{f}$  لكل  $f \in L^{+}$ .

هذا يعني أن (ك م \*) زمرة.

مثال (٣):

لنفرض أن م ٢×٢ مجموعة كل المصفوفات من نوع ٢×٢ بمداخل من الأعداد الحقيقية، ولنفرض أن العملية الثنائية \* على م٢×٢ عملية جمع المصفوفات.

من الواضح أن المصفوفة الصفرية 
$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$
 هي العنصر الحايد لهـذه العمليـة، وأن لكل مصفوفة  $\begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$  نظير جمعي  $-1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ 

وبالتالي كل الخواص المطلوبة لتكون زمرة متحققة على المجموعة م٢٠٢ تحـت العملية \*، وهذا يعني أن (م٢٠٢٠ \*) زمرة.

مثال (٤):

لنفرض أن  $q_{7\times 7}$  هي مجموصة كل المصفوفات  $\begin{bmatrix} 1 & P \\ P & c \end{bmatrix}$  من نوع  $Y \times Y$  يداخل من الأعداد الحقيقية حيث أن  $q_{1} - P + P + C$ 

وأن العملية الثنائية المعرفة على م<sub>٢×٢</sub> هي عملية ضرب المصفوفات.





من الواضع أن العنصر الحايد لهذه العملية هو [ المرابي العنصر الحايد العملية هو [ المرابي العنصر الحايد العصر في العصر في العصر العصر في العصر في العصر في العصر في العصر في العصر ال

 $\frac{1}{q_{k-p+q}} = \begin{bmatrix} x & -p \\ -q_{k-p+q} \end{bmatrix}$ ، وكما هو معلوم فإن ضرب المصفوفات عملية مغلقة وتجميعية، ولهذا فإن  $q_{xyy}$  (مرة.

تعریف: الزمرة (ك، \*) تسمي زمرة تبدیلیة (Commutative) إذا كان 4 + 9 = 4

تعریف: إذا كانت ك مجموعة منتهیة، فإن الزمرة (ك، \*) تسمى زمرة منتهیة (finite) وعدد عناصرها یسمى رتبة (order) الزمرة (ك، \*) ویرمز لذلك بالرمز (۱) (ك).

تسمى الزمرة التبديلية في بعض الأحيان بالزمرة الأبيلية (abelian)، الزمر في المثال ١، المثال ٢، المثال ٣ زمر تبديلية، ولكن الزمرة في المثـال ٤ زمـرة غـير تبديلية لأن عملية ضرب المصفوفات عملية غير تبديلية.

#### ملاحظة (١):

من الآن فصاعداً نكتب الزمرة ك بـدلاً مـن الزمـرة (ك، \*)، ونكتب أب بدلاً من أ \* ب وذلك للاختصار.

نأتي الآن إلى دراسة بعض الخواص الأولية للزمر والتي نلخصها على شكل مبرهنات:





مبرهنة: إذا كانت ك زمرة، فإن:

١- اجـ = اب يؤدي إلى أن جـ = ب.

٢- جـ أ = بأ يؤدي إلى أن جـ = ب.

الخاصيتان (١)، (٢) في المبرهنة السابقة يطلق عليهما اسم قانون الاختـصار من اليسار وقانون الاختصار من اليمين على الترتيب.

البرحان:

١- لنفرض أن إب= إج

ما أن  $\{ ^{-1} \in \mathbb{D} : \{ ( 9 ) = ( 9 ) \}$  من اليسار يعطي  $\{ ^{-1} ( 9 ) = ( 9 ) \}$ 

(۱<sup>-۱</sup> ۹) ب = (۱<sup>-۱</sup> ۹) ج. من خاصية التجميعية

هـ ب = هـ جـ من خاصية النظير

ب = ج من خاصية العنصر الحمايد

٧- لنفرض أن ب إ= جـ إ بما أن إ ' ﴿ ك:

فإن الضرب في أ- من اليمين يعطي:

١-١(١--) = ١-١(١٠)

ب ( ﴿ ﴿ أَ أَ أَ أَ ﴾ = جـ ( ﴿ ﴿ أَ أَ أَ ) خاصية التجميعية.

ب هـ = جـ هـ خاصية النظير.

ب = جـ خاصية العنصر الحايد.



يمتاز العنصر المحايد في الزمرة بأنه عنصر وحيد، وكذلك نظير العنـصر لابـد أن يكون وحيداً.

المبرهنة التالية توضح ذلك.

مبرهنة: إذا كانت ك زمرة، فإن:

١- العنصر المحايد هـ في ك وحيداً.

٢- لكل عنصر ( في ك نظير وحيد ( أ في ك.

7-(4-1)-1= 1 (2), 1 € 1.

٤- ( ﴿ ب ) " = ب " ﴿ ﴿ لَكُلُّ عَنْصُرِينَ ﴿ ، ب ﴿ كُ.

#### البرهان:

 ال لنفرض أن هـ،، هـ، كلاهما عنصر محايد في ك. هـ،= هـ،هـ،= هـ، وهذا يعني أن هـ،=هـ، والذي يوضح أن العنصر المحايد في الزمرة لابد أن يكون وحيداً.

٧- لنفرض أن أ ∈ ك وأن له نظيران س، ص. إذن س أ= أس= هـ

كذلك ص إ = إص = هـ ومن ذلك نصل إلى س إ = ص أ

ومن قانون الاختصار نجد أن س= ص.

٣- يما أن (١-١) ١ ١-١= هـ وكذلك ١١ ١٠ هـ

فإن (١-١) أ (١-١) ومن قانون الاختصار نجد أن (١-١) إ = ١

٤- لغـرض أن (، ب ∈ ك ⇒ ( (ب (ب ( ( - ( ( ا ب - ( ) ) = ( ( ب ب - ( ) ) ( ا ب ( ) ) ( ا ب ( ) ) ( ا ب ( ) ) ( ا





(fa.) f = 1 f - = a.

بنفس الطريقة عكن استنتاج أن:

(ب" ( ( اب ) = هـ

وهذا يعني أن ﴿ ''ب' \* هو نظير العنصر ﴿ ب، أي أن ( ﴿ ب) ''= ب' ﴿ ''.

يمكن تعميم هذه الخاصية إلى أكثر من عنصرين، أي أن:

(4, 4, ... 1, )" = 1 [" ... 1, " 1, "

إذا كان ﴿ عنصر في الزمرة ك، فإن:

إذا كانت ك زمرة منتهية وتحتوي ن من العناصر، فإن:

(٠) (ك)=ن وحييث أن ﴿ إلى فيإن ﴿ إ ﴿ ﴿ ﴿ كَ مَا ۖ ﴿ إِلَى الْ ﴿ وَكَ... وَهِ لَمَا لِمَا إِلَّهُ إِلَى اللَّهِ عَلَى إِلَا ﴿ مَا ﴿ مَا ﴿ مَا ﴿ مَا أَنْ مَنْ فَي كُوالَّذِي لَا لَكُولُ لِلْ عَلَى اللَّهِ عَلَى اللَّهُ عَلَى اللَّهِ عَلَى اللَّهُ عَلَى اللّهُ عَلَى اللَّهُ عَلَى اللّهُ عَلَّا عَلَى اللّهُ عَلَى

- هـ.

إذن هناك على الأقل عدد صحيح موجب م حيث (١= هـ.

لنفرض أن ن هو أصغر مثل هذه الأعداد الصحيحة الموجبة م.

إذن كان جـ عدد صحيح، فإن هناك عددان صحيحان ر، ي حيث أن:

جـ ≕ي ن+ر.



و ۰≤ر<ن

إذن

$$\phi^{+}=\phi^{0}\phi^{+}\psi=\phi^{0}\phi=\phi^{0}=\phi^{0}\phi=\phi^{0}\phi$$

هذا يعني أن المجمه إحدى العناصر

وهذه العناصر مختلفة، لأنه إذا كان:

وهذا يناقض كون ن هو أصغر الأعداد الصحيحة الموجبة حيث أ<sup>ن</sup>= هـــ

إذا كانت الزمرة ك تحتوي على عنصرين فقط، فإن أحدهما لابـد أن يكـون العنصر الحايد هـ والعنصر الآخر ( حيث ( لخ هـ.

الآن:

ك = {هـ أ}

P	٨	*	
P	_A	_&	
	1	1	

إذا كونا جدول للزمرة ك، فإننا نلاحظ من الجدول أن هـ هـ = هـ، هــ أ = أ، إهـ = أ ولكن أ أ غير واضح.





نعلم أن ﴿ ﴿ لَابِدُ أَنْ يَكُونَ عَنْصِرَ فِي كُ، يَمَعَنَى آخَرٍ، ﴿ ﴿ لَابِدُ أَنْ يَسَاوِي هَــُ أو ﴿.

وهذا يعني أن ﴿= هـ وهو تناقض.

إذن:

#### مثال (٥):

ب	ŀ	ه	*
ب	1		-8
	ب	1	ł
		ب	ب

كون جدول لزمرة ك تحتـوي علـى ثلاث عناصر.

إذا كونا جدول للزمرة نلاحظ أن هـ هـ = هـ، هـ. أ= أ، هـ. ب = ب، أهـ = أ

وكذلك ب هـ = ب.

بما أن أ ≠ هـ و ب≠ هـ ومن قانون الاختصار

اب + ا و اب + ب وحيث أن اب في ك، فإن اب + هـ.

بنفس الكيفية نجد أن ب إ = هـ.

الآن  $\{ 1 \neq 1 \}$  وكذلك  $\{ 1 \neq 1 \}$ هـ لأن تساويهما يؤدي إلى أن  $\{ 1 \neq 1 \}$  تناقض.





إذن ( أ = ب وكذلك ب ب = (، وبذلك نحصل على الجدول الكامل للزمرة ك= (ه ) ، ب}.

#### تمارين

۱- إذا كانت  $2 = {-1, 1}$ ، فوضح أن 2 = 2 عملية المضرب الاعتيادية تكون زمرة.

٢- وضح أن:

$$\left\{\frac{7\sqrt{y}}{7}, \frac{7\sqrt{y}}{7}, \frac{7\sqrt{y}}{7}, 1\right\} = \frac{4}{3}$$

تحت عملية ضرب الأعداد المركبة تكون زمرة رتبتها ٣.

٣- إذا كانت ك = {هـ، أ، ب، جـ} زمرة حيث (١) (ك) = ؛ و هـ ٣-

 $A^{\prime} = \gamma^{\prime} = \gamma^{\prime} = A$  if  $A = A^{\prime} = A$ 

 $^{2}$  - لنفرض أن ك زمرة حيث  $^{4}$  = هـ لكل  $\in$   $^{4}$ ك.

برهن أن ك زمرة تبديلية.

٥- لنفرض أن (١٠ ب عنصرين في الزمرة ك. إذا كان (١٩) - ١ = ١- ب-١، فرهن أن (١٠) - ١ = ١ - ب-١.

-1 إذا كانت ك زمرة تبديلية، فبرهن أن  $(1-1)^0 = 0^0$ 

٧- إذا كانت ص مجموعة الأعداد الصحيحة وإذا كانت العملية \* المعرفة على ص هي (\*ب= (+ب+ ا برهن أن ص تحت هذه العملية زمرة.

- إذا كانت س مجموعة وكانت ρ(س) مجموعة كل الجموعات الجزئية من





س وإذا عرفت العملية \* على  $\rho(m)$  بحيث أن أ\* $\phi$  = (ا∪ $\phi$ ) – (ا∩ $\phi$ ).

برهن أن ρ(س) تحت هذه العملية زمرة تبديلية.

### \* الزمر الجزئية والمجموعات المصاحبة subgroups and cosets

قد تكون المجموعة المراد دراستها مجموعة جزئية مـن زمـرة معينـة، وفي هــــلـه الحالة قد يتبادر إلى اللـهـن السؤال التالى:

ما هي الشروط التي تتوفر في المجموعة الجزئية من زمرة معينـة حتى تكـون زمرة في حد ذاتها؟.

من الأمثلة التي درست بمكن استنتاج أن هنـاك مجموحـات جزئيـة بـشروط معينة من زمرة عند تقييد العمليـة المعرفـة علـى الزمـرة علـى تلـك المجموحـات الجزئية يقود ذلك إلى زمر جديدة.

نركز انتباهنا في هذا البند على مثل هذا النوع من المجموعات الجزئيـة لزمـرة معطاة.

#### تعريف:

لنفرض أن ك زمرة. المجموعة الجزئية غير الية ل من الزمرة ك تسمى زمرة جزئية (Subgroups) من ك بالنسبة للعملية المعرفة على ك إذا كانت ل في ذاتها زمرة تحت تلك العملية.

من الملاحظ أن لكل زمرة ك زمرتين جزئيتين هما الزمرة ك نفسها والزمـرة الجزئية التافهة {ل}، كل الزمر الجزئية الأخرى للزمرة ك تسمى بـالزمر الجزئيـة الفعلية.





قد يكون من الأفضل بناء معيار لتحديد ما إذا كانت المجموعـة الجزئيـة غـير الخالية من زمرة ك زمرة جزئية.

المبرهنة التالية توضح طريقة مثلى لتوضيح أن مجموعة جزئية مـن زمـرة ك تصلح لأن تكون زمرة جزئية أم لا.

مبرهنة: لنفرض أن ل مجموعة جزئية غير خالية من زمرة ك.

ل زمرة جزئية من ك إذا وإذا كان فقط  $\{a, p \in b \text{ يودي إلى أن <math>\{p^{-1} \in b \text{ .} \}$ .

إذا كانت ل زمرة جزئية من ك، وكان  $\{, + \in \mathbb{C}$ ، فو  $+ \in \mathbb{C}$  أن ل أن ل زمرة في حد ذاتها، وبالتالي  $\{+ - \in \mathbb{C}$  من خاصية الانفلاق.

إذا كانت ل مجموعة جزئية غير خالية من ك ولكل ﴿، ب ∈ ل يكون ﴿ب ٰ <لا وله فإن ل تحتوي على الأقل على عنصر واحــد ﴿. نـــتعليع أن نأخــد ﴿=ب وبالتالي ﴿ ﴿ أَ ۚ ۚ = هــ ∈ ل.

لكل عنصر ∈ أ ل، فإن أ<sup>-1</sup>= هـ أ<sup>-1</sup>، وأخيراً إذا كـان أ، ب ∈ ل فـإن أب = أ(ب<sup>-1</sup>) - ل حيث أن ل مجموعة جزئية من ك، فإن قـانون التجميــع المتحقق في ك لابد أن يكون متحققاً في ل.

هذا يوضح أن كل الشروط المطلوبة للزمرة قد تحققت في المجموعة الجزئيـة غير الحالية ل.

إذن ل زمرة جزئية من ك.





تقاطع أي تجمع من الزمر الجزئية لزمرة ك همو أيضاً زمرة جزئية ممن ك، نضع هذه الحقيقة في المبرهنة التالية التي نترك برهانها للقارئ.

مبرهنة: تقاطع أي تجمع من الزمر الجزئية لزمرة ك هو أيضاً زمرة جزئية من ك.

إذا كانت الجموعة الجزئية غير الخالية من زمرة ك مجموعة منتهية فـإن الأمـر قد يكون بسيط وأبسط من المذكور في المبرهنة ما قبـل الـسابقة للتحقـق مـن أن تلك المجموعة الجزئية تكون زمرة جزئية، المبرهنة التالية توضح ذلك.

مبرهنة: المجموعة الجزئية المنتهية  $b \neq 0$  من الزمرة ك زمرة جزئية من ك إذا كـان  $\phi \in \mathbb{R}$  ب  $\phi \in \mathbb{R}$  ل.

بمعنى آخر المجموعة الجزئية المنتهية غير الحالية من زمرة ك تكون زمرة جزئية إذا كانت مغلقة تحت عملية الزمرة ك.

# البرحان:

اعتماداً على المبرهنة الواردة في بداية الفصل نحتاج إلى برهنة أنه إذا كان:

ا ∈ ل، فإن ا " ∈ ل.

لنفرض أن أ ∈ ل.

لاحظ أن ا أ = ا ا و ل، ... ، ( و ل، ... ، ا = ا ا و ل

وحيـــث أن ل مجموعــة منتهيــة و ﴿، ﴿ ۚ ، ﴿ ، ...، ﴿ ، .... كلـــها في ل، فإن هناك تكرار، أي أن:

( = اله لعدين صحيحين ر، ن حيث ر>ن>،





إذن ل زمرة جزئية من ك.

### \* الجموعة الصاحبة Cosets

إذا كانت ل زمرة جزئية من زمرة ك، فإن ل تشكل تجزيء للزمرة ك يتكون من مجموعات منفصلة تسمى مجموعات مصاحبة Cosets.

قبل تعريف المجموعات المصاحبة نتعرض لتعريف علاقة متكافئة لهـا أهميـة كبرى في دراسة المجموعات المصاحبة.

تعریف: لنفرض أن ك زمرة وأن ل زمرة جزئية من ك. إذا كـان أ ب  $\in \mathbb{D}$ ، فإننا نقول بأن أ يطابق ب مقياس ل إذا كان أب  $\in \mathbb{D}$ . رمزياً | = + (mod) إذا كان أب | - +  $\in \mathbb{D}$ .

(J mod) = -1

٢- إذا كان أ = ب (mod ل) و ب = جـ (mod ل) فإن أ = جـ (mod ل)
 ولتوضيح ذلك:

أ- ﴿ ﴿ أَ = هـ ∈ ل لأن ل زمرة جزئية من ك.





نتعرض الآن لتعريف المجموعة المصاحبة لزمرة جزئية ل من زمرة ك.

تعريف: إذا كانت ل زمرة جزئية من الزمرة ك، فإن المجموعة المصاحبة اليسرى (Left Coset) للزمرة الجزئية ل من الزمرة ك هي إل = { إل\*: ل و ل}

(right coset) بنفس الأسلوب يمكن تعريف المجموعة المصاحبة اليمنى للزمرة الجزئية ل من الزمرة ك لتكون  $\{ l^* | 1 > l^* \}$ 

تعرضنا في دراستنا السابقة إلى تعريف الفصل اتكافئ للعنصر ﴿ في الجموعة ﴿ واللَّذِي يُحدد بواسطة علاقة تكافئ معرفة على المجموعة أ، وعرفنا في النقاش للتعريف السابق علاقة التطابق (والتي وضحنا أنها علاقة متكافئة على الزمرة الجزئية ل)، وبذلك فإن فصل التكافئ للعنصر ﴿ هو:

المبرهنة التالية توضح العلاقة بين فيصل التكافئ للعنصر ﴿ فِي الزمرة كُ والمجموعة المصاحبة للزمرة الجزئية ل من ك التي يجددها العنصر ﴿.





مبرهنة: إذا كانت ل زمرة جزئة من الزمرة ك، فإنه لأي عنصر أ ∈ ك يكون ل أ = [ا]

 $\text{List}_{0} \text{ if } \mathbf{b}^{0} \mathbf{f} \in \mathbf{b}^{1} \quad \text{Weak is } \mathbf{f}(\mathbf{b}^{1})^{-1} = \mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1} \mathbf{b}^{-1})$   $= \mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}) \mathbf{b}^{-1} = \mathbf{a} \mathbf{b}^{0} \mathbf{f}^{-1} \in \mathbf{b}$ 

لأن ل زمرة جزئية من ك. وهذا يعني أن أ = ل\* ( mod ل)

وبذلك يكون  $U^* \in \{ [4] \text{ وهذا يوصلنا إلى أن <math>U_{[6]}[4] \dots (1)$  الآن لنفرض أن س  $U_{[6]}[4]$ 

هذا يعني أن إس ٔ ( الله ومن المعلم أن ( إس ٔ ٔ ) = س أ ٔ ، وحيث أن ل زمرة جزئية من ك، فإن إس ٔ ( الله ).

نستطيع فرض اس َ ﴿ وَ لُ ۚ ، وَهَذَا يَعْنِي أَنْ سَ = لُ ۗ أَ ، وَبَـذَلَكُ نَـصَلَ إِلَىٰ أَنْ سَ وَ لَ، وَهَذَا يَعْنَى أَنْ [م]⊆كا .......(٢)

من (١) و (٢) نستنتج أن ل أ= [أ]

المبرهنة السابقة توصلنا إلى الاستنتاج التالي:

يمكن تجزيء الزمرة ك بواسطة مجموعات مصاحبة يمنى منفصلة، أي أن أي مجموعتين مصاحبتين يمنى للزمرة الجزئية ل في ك إما أن تكونا متطابقتين أو تكونا منفصلتين.

لنفرض أن أ، ب ∈ ل وأن أ ≠ ب و ل زمرة جزئية من زمرة ك.

هناك تناظر أحادي بين الجموعات المصاحبة اليمنى ل أ والمجموعة المصاحبة اليمنى ل ب، أي أن حيث Φ (ك°أ) = ل°ب فإن ل استعل





من الملاحظ أن φ دالة فوقية.

الآن إذا كــان ك.' ، ك.'  $\in$  ل و  $\phi(b.' | \phi)=\phi(b. | \phi)$ ، فــإن b.' + b.' + b.' ب ومن قانون الاختصار نصل إلى أن b.' = b.' وهذا يعني أن  $\phi$  دالة أحادية.

عندما تكون ل زمرة جزئية منتهية من المزمرة ك، فإن هناك سؤال يتبــادر إلى الذهن وهو: ما هو عدد عناصر المجموعة المصاحبة اليمنى ل أ؟

للإجابة على هذا السؤال نلاحظ أن ل = ل هـ ولقد وجدنا تناظر أحـادي بين المجموعة المصاحبة اليمني ل أ والمجموعة المصاحبة اليمني ل = ل هـ.

ومن ذلك نصل إلى الإجابة وهو أن عدد عناصر المجموعة المصاحبة ل فم هـ و عدد عناصر الزمرة الجزئية ل، أي أن ( · ) (ل) = ( · ) (ل فم).

فإذا كان عدد المجموصات المصاحبة اليمنى للزمرة الجزئية ل من الزمرة المنتهية ك هو  $\lambda$ ، فإن  $\lambda(\cdot)$  (ل) = (٠) (ك)

خلاصة النقاش السابق هو برهان المرهنة التالية:

مبرهنة: إذا كانت ك زمرة منتهية وكانت ل زمرة جزئية مــن ك، فــإن رتبــة الزمرة الجزئية ل قاسم لرتبة الزمرة ك.

إذا كانت ك زمرة منتهية، فإن عدد المجموعات المصاحبة اليمنى (اليسرى) للزمرة الجزئية ل من ك يسمى دليل ل في ك، ويرمز لذلك بالرمز [ك: ل] أي أن:

[ك: ك] = عدد الجموعات المصاحبة اليمنى للزمرة الجزئية ل من ك.

= عدد الجموعات المصاحبة اليسرى للزمرة الجزئية ل من ك.





النتيجة التالية توضح العلاقة بين رتبة الزمرة ك، ورتبة الزمرة الجزئية ل مـن ك، ودليل ل من ك.

نتيجة (١): لنفرض أن ك زمرة منتهية وأن ل زمرة جزئية من ك.

عندئل يكون (١) (ك) = [ك: ل] (١) (ل).

# البرهان:

حيث أن ك هي اتحاد المجموعات المصاحبة اليمنى المنفصلة للزمرة الجزئية ل من ك، وحيث أن عدد المجموعات المصاحبة اليمني يساوي [ك: ل] فإن:

(・)(と)[(と)](・)

عدد الزمر الجزئية لزمرة ك من المواضيع المهمة التي يعالجهما الجبر المجرد، ولكن ذلك يحتاج إلى الكثير من المعلومات التي لم نتزود بهما حتى الآن، ولكن يمكن الوصول إلى بعض النتائج حول هذا الموضوع بالمعلومات السي تزودنا بهما حتى الآن، النتيجة التالية تسلط بعض الضوء على هذا الموضوع.

نتيجة (٢): إذا كان (٠) (ك) عدد أولي، فإن الزمرة ك ليس لها زمر جزئية عدا {هـ}، ك.

# البرهان:

لنفرض أن (٠) (ك) = ن حيث ن عدد أولي.

إذا كانت ل زمرة جزئية من ك، فإن (٠) (ل) يقسم (٠) (ك)، وهذا يعني أن (٠) (ل) يساوى ١ أو ن.





إذن إما ل = {هـ} أو هـ = ك.

### تمارين

۱- إذا كانت { ل<sub>a</sub>} عائلة زمر جزئية من ك، فبرهن أن له زمرة جزئية من ك.

٢- إذا كانت ل زمرة جزئية من ك، فبرهن أن (ال (<sup>-1</sup> = ( ( ال ( ( <sup>-1</sup> : ال ( ∈ E) ) ) ) ) ( زمرة جزئية من ك، عندما يكون ( ∈ D).

 $^{7}$  إذا كانت ك زمرة منتهية وإذا كان  $^{4}$   $\in$  ك، فبرهن أن هناك عدد صحيح موجب ن حيث أن  $^{4}$  = هـ.

٤- لنفرض أن ك زمرة وأن ﴿ عنصر ثابت في ك.

وضح أن المجموعة { س ∈ ك: س أ = أس}

 إذا كانت ل زمرة جزئية من الزمرة التبديلية ك، فوضع أن أي مجموعة مصاحبة يمنى للزمرة الجزئية ل من ك هي أيضاً مجموعة مصاحبة يسرى للزمرة الجزئية ل من ك.

 $^{-1}$  لنفرض أن ل زمرة جزئية من ك. إذا كان [ك: ل] =  $^{-1}$ ، فبرهن أن ك زمرة تبديلية.

٧- لنفرض أن ل زمرة جزئية من ك.

إذا كـان جــ (ل) =  $\{ w \in \mathcal{E} : w \, \mathbb{C}^* \, w \, , \, \mathbb{C}^* \in \mathbb{D} \}$  برهن أن جـ (ل) زمرة جزئية من  $\mathcal{E}$ .

٨- إذا كان ك زمرة، فبرهن أن:ع(ك) = { ق ∈ ك: ق س = س ق، س ∈





ك} زمرة جزئية من ك.

٩- لنفرض أن ل زمرة جزئية من الزمرة ك. إذا كان ن (ل) = { أ ∈ ك:  $\{b^* - b^* = b^*$ 

 ١٠- إذا كانت زمرة جزئية من ك، وإذا كانت ق زمرة جزئية من ل، فبرهن أن ق زمرة جزئية من ك.

# الزمر الدائرية Cyclic Groups

لنفرض أن أ عنصر في الزمرة ك، وأن ل زمرة جزئية من ك تحتوي على العنصر أ. المجموعة <1 =  $\{$ 1 (0 )2 )3 أحد الجموعة <1 الزمرة الجزئية <1 )4 هي تقاطع كمل الزمر الجزئية من ك والتي تحتوى على أ.

تعريف: إذا كان هناك عنصر في الزمرة ك بحيث أن ك = < أ>، فبإن الزمرة ك، في هذه الحالة تسمى زمرة دائرة (Cyclic Groups)، ويسمى العنصر أ في هذه الحالة مولد الزمرة ك.

#### مثال (٦):

الزمرة (ص، +) دائـرة ومولـدها العـدد ١، أي أن ص = <١>، ويمكـن أن تولد الزمرة (ص، +) كذلك بالعدد -١، أي أن ص = <-١>.

#### مثال (٧):

لنفرض أن (ص، +) زمرة الأعداد الصحيحة تحت العملية +.





لاحظ أن <٦> = ٣ص

نستطيع تعميم ذلك لأي عدد صحيح ن، أي أن <ن > ن ص

اضافة إلى ذلك، فإن ن ص = ص إذا وإذا كان فقط ن =  $\pm$  ١.

مثال (٨):

إذا كانت (ح، +) زمرة الأعداد الحقيقية تحت عملية الجمع، فإنه إذا كان  $\neq \lambda$  عدد حقيقي، فإن الزمرة  $<\lambda>=\{i\lambda: i\in \omega\}$  زمرة جزئية دائرية من (ح، +) مولدها العنصر  $\lambda$ .

 $4 < \lambda > 1$  لا يوجد أي عدد صحيح ن حيث أن  $0 < \lambda > 1$ ، وهذا يؤدي إلى أن  $0 < \lambda > 1$  ح. الزمرة (ح، +) مثال على زمرة غير منتهية وليست زمرة دائرية.

تمتاز الزمر الدائرية مخاصية قد لا توجد في الزمـر الأخــرى، المبرهنــة التاليــة توضح هذه الخاصية.

مبرهنة: كل زمرة دائرية لابد أن تكون تبديلية.

البرهان:

<ان ك زمرة دائرية مولدها العنصر أ. ك =

إذا كان ع، ل  $\in$  ك، فإن هناك عددين صحيحين، جــ ر حيث أن ل =  $4^{-}$  و ع=  $4^{+}$ 

الأن





وهذا يعني أن ك زمرة تبديلية.

خوارزمية القسمة توضح أنه إذا كان م عـدد صحيح موجب وأن ن عـدد صحيح، فإن هناك عددين صحيحين وحيدين ر، ق حيث أن:

يمكن تخيل ذلك على خط الأعداد كما يلى:



المبرهنة التالية توضح خاصية معينة بالزمر الجزئية من الزمر الدائرية.

مبرهنة: الزمرة الجزئية من زمرة دائرية لابد أن تكون دائرية.

# البرهان:

لنفرض أن ك زمرة دائرية مولدها العنصر ﴿.

إذا كانت ل زمرة جزئية للزمرة الدائوية ك، فإنه إما أن تكون ل= {هـ} وهي زمرة جزئية دائرية أو أن ل $\neq$ {هـ}، وفي الحالة الأخيرة يكون هناك مس  $\neq$ هـ حيث س =  $\{^{6}$  في ل.

لنفرض أن العدد الصحيح الموجب م هو أصغر عدد صحيح موجب حيث  $A^{\circ} \in \mathbb{D}$ .

المطلوب برهنة أن ص = أا هو مولد ل بمعنى آخر





لكي نبرهن أن ل زمرة دائرية، لابد أن يكون ب على الشكل  $\{^{\circ}.$ 

الآن نستخدم خوارزمية القسمة

ن=م ق+ر حیث ۰≤ر<م

وبذلك يكون (<sup>٥</sup> = (١)<sup>ق و</sup> ( (١)<sup>ق</sup> (

وهذا يعني أن (<sup>ر</sup> = ((١)<sup>-ق</sup> (<sup>د</sup>

وحيث أن ل زمرة جزئية، فإن (١٩) تن  $( ^{\circ} )$  ل، وهذا يعني أن  $( ^{\circ} )$  ل.

نستنتج من ذلك أن ل زمرة جزئية دائرية.

تعريف: لنفرض أن أ عنصر في الزمرة ك.

رتبة العنصر ( (order of) هو أصغر عدد صحيح موجب م حيث (١ = هـ ويرمز لذلك بالرمز (١) ( ( ) = م. إذا لم يوجد مثل هذا العدد م، فإننا نقول بأن العنصر ( الأنها في الرتبة.

مبرهنة: إذا كان ﴿ عنصر في الزمرة ك رتبته م، فإن:

ا- اله م إذا وإذا كان فقط م/ن.

 $Y = {}^{t}$  إذا وإذا كان فقط ي  $\equiv$  ر (mod م).



### البرهان:

۱- إذا كان  ${}^{0}=$  هـ، فاستخدام خوارزمية القسمة يمكننا من الحسمول i= ق a+c حيث  $- \leq c < a$  إذن هـa=  $a^{0}=$   $a^{0}+c=$   $a^{0}+c=$ 

$$= (1)^{\hat{b}} \cdot (1 = A_{-}^{\hat{b}} \cdot (1 = A_{-$$

وحيث أن •≤ر<م، والعدد م هو أصغر صدد صحيح موجب يحقق أا= هـ، فإن ر = ٠.

هذا يعني أن ن= ق م ومنه نصل إلى م/ن.

العكس

إذا كان م/ن، فإن ن= مج حيث جـ عدد صحيح.

 $Y - {}^{(y)} = {}^{(y)}_{1} g(y)$  (1) أن  ${}^{(y)}_{1} = g(y)$  .

والذي يعني أن ي ≡ ر (mod م).

العكس

من الواضح أن ي  $\equiv$  ر (mod م) يعني أن م/ (ي-ر) ومن (١) هذا يـؤدي إلى أن  $\P^{pr} = \P^{r}$  هـ وتحصل من ذلك على  $\P^{r} = \P^{r}$  هـ والذي بـدوره يعني أن  $\P^{pr} = \P^{r}$ .





٣- من (٢) نلاحظ أنه لا يوجد عددين من الأعداد ١، ٢، ١، ٢، ١٠ ، م-١.

يمكن أن يتطابقا مقيـاس م، وهـذا يعـني أن هـ، ﴿، ﴿ ۚ، ...، ﴿ ا ۚ كلـها عناصر مختلفة.

3- من الواضع أن < ا>= {هـ، (م، (م، (م، (م))) الأنه إذا كان (م عنصر معطي، فإن هناك عدد صحيح ي محقق <  $\leq$   $\leq$   $\leq$  < معطي، فإن (مناك فإن (م = (م) وهذا يعني أن (م هـ احد العناصر < < < < > > > > = {هـ، (م، (م) < > <math>< > <math>> > > > >

من المبرهنة السابقة نستطيع استنتاج أنه إذا كانت ك زمرة لانهائية رتبتها  $\{t^*: c \in \mathcal{O}_{+}\}$ .

هميث تكون كل القوى ختلفة، أما إذا كانت ك زمرة دائرية منتهية حيث (٠) (ك)= م فإن ك= <أ>= {هـ، أ، أن الأ، ...، أا أ وتكون العناصر هـ، أ، أ، ...، أا أً أُنْ كلها غتلفة.

إذا كانت ك زمرة منتهية، ليكن (٠) (ك)= ن، فإنه من مبرهنة لاجرانج نستنج:

ومن مبرهنة سابقة وصلنا إلى أن (٠) (﴿) = (٠) (<﴿>)

وهذا يعني أن (٠) (١)/ (٠) (ك





بمعنى آخر كل عنصر في زمرة منتهية له رتبة منتهية تكون قاسماً لرتبة الزمرة ك.

# هذا النقاش يوصلنا إلى النتيجة التالية:

نتيجة (٣): إذا كانت ك زمرة منتهية وكان ﴿ € ك، فإن:

(A)  $(\cdot)$   $/(\dagger)$   $(\cdot)$  -1

\_ = (d) (+) - T

نستطيع الآن تصنيف الزمر الدائرية إلى:

# ا . زمر غير منتهية، بمعنى آخر تحتوي على على لانهائي من العناصر.

إذا كانت ك زمرة دائرية غير منتهية وكمان  $f \in ك، فيان هنـاك عــدين <math>-$  صحيحين - - رحيث أن - - - - - لبرهنة ذلك نفرض أن

ا<sup>ي</sup> = ا<sup>ر</sup> حيث ي+ر، ليكن ي>ر.

 $\underline{\quad }=^{J^{-}\underline{G}}\big\}=^{J^{-}}\big\}=\overset{\underline{G}}{}\big\}$ 

هذا يوضح أن هناك عدد موجب ل حيث أن  $\{^{0}=$ هـ.

لنفرض أن م هو أصغر عدد صحيح موجب حيث أن (1 = هـ.

إذا كان ذلك صحيحاً، فإننا نستطيع إيجاد عندين صحيحين ر، ق أي عنصر أ $^6 \in \mathbb{E}$ 

(۱۱) فا الفاد الماران الم





أي أن  $\{^{c}$  هو أحد عناصر الزمرة الدائرية <>>، وهـذا يعـني أن ك تحتـوي $نقط على العناصر المختلفة هـ، <math>\{^{a}, {a}, {a}, {a}, {a}\}$ ، عما يناقض الفرض وهو أن ك زمرة غير منتهية.

إذن نصل إلى الاستنتاج وهو أن ي $\neq_{\mathrm{C}}$  يؤدي إلى أن  $\{^{\mathrm{D}} \neq \{^{\mathrm{C}}.$ 

### ۲ – زمر منتهیة.

إذا كانت ك زمرة دائرية منتهية، فإن ذلك يعني وجود أصغر عمدد صحيح موجب م حيث أن  $\P^1$  هـ، وبذلك فإن ك تحتوي على هـ،  $\P^1$ ، ...،  $\P^1$  من العناصر المختلفة ويكون (٠) (ك)= م.



#### مثال (٩):

عملية الجمع مقياس م على هذه المجموعة تكون زموة منتهية رتبتها م. إذا كانت الزمرة دائرية منتهية، فإن المبرهنة التالية توضح العناصر المولدة لزمرها الجزئية.





مبرهنة: لنفرض أن ك زمرة دائرية منتهية رتبتها ن.

إذا كان العنصر أ مولد الزمرة أك وكان o  $\in$  1 حيث o o أن أن o يولد زمرة جزئية دائرية من 1 تحتوي على  $\frac{\dot{v}}{c}$  من العناصر عندما يكون 0 (ن، ر).

### البرهان:

لقد وضحنا سابقاً بأن ص ∈ ك يولد زمرة جزئية ل من ك.

إذا كان ص = هـ فإن ص = ( ((<sup>ر) =</sup> و (<sup>ج =</sup> هـ وهذا يوضح (حسب ميرهنة لاجرانج) أن ر جـ قاسم للعدد ن.

إذا كان د هو أكبر عدد يقسم كلاً من ر، ن، فإن  $v=v\left(\frac{\dot{v}}{v}\right)$ ، ومن ذلك نرى أن د يقسم المدد جب وأن  $v=\frac{\dot{v}}{v}$ .

من هذه المبرهنة يمكن استنتاج النتيجة التالية:

نتيجة (؛): الزمرة التي رتبتها ن (عندما يكون ن عدد أولي) زمرة دائرية.

ينتج ذلك من أن أي عنصر ≠ ﴿ هـ في الزمرة ك التي رتبتها ن له رتبـة قاسـم للعدد الأولي ن، ولهذا فإن (٠) ( ﴿)= ن، هذا يعني أن الزمرة الجزئية ل أي تولد بواسطة العنصر ﴿ تكون كل ك، أي أن ل = ك.

نتيجة (٥): الزمر الجزئية للزمرة الدائرية ك التي رتبتها عدد أولي ن همي {هـ}، ك نفسها.

من مبرهنة لاجرانج نجد أن (٠) (ل) لأي زمرة جزئيـة ل مـن ك هـو عـدد





قاسم للعدد الأولى ن، وحيث أن ن عدد أولى، فإن قواسمه هي ١، ن.

لقد عرفنا أنه إذا كانت ك زمرة رتبتها ن وأن ل زمرة جزئية من ك، فإن (٠) (ل)/ن، ولكن هذا لا يعني أنه إذا كان العدد م قاسم للعدد ن (أي أن م/ن) يؤدى إلى وجود زمرة جزئية من ك رتبتها م.

هذا صحيح في حالة الزمر الدائرية، أي أنه إذا كانت ك زمرة دائرية رتبتها ن، وإذا كان م/ ن، فإن هناك زمرة جزئية ل من ك رتبتها م. المبرهنة التالية توضح ذلك.

مبرهنة: لنفرض أن ك زمرة دائرية رتبتها ن.

إذا كان م/ ن، فإن هناك زمرة جزئية ل من ك رتبتها م.

### البرهان:

لنفرض أن ن=م ر وأن ص مولد الزمرة ك.

العناصر هــ ص<sup>ر</sup>، ص<sup>رر</sup>، ...، ص<sup>(م-١١</sup> كلها مختلفة وتكون زمـرة جزئيــة ل من ك.

من مبرهنة سابقة الزمرة الجزئية لزمرة دائرية لابد أن تكون دائرية.

النتيجة التالية توضح مولدات الزمرة الدائرية المنتهيـة والعلاقـة الـــــي تـــربط هـذه المولدات.

نتيجة (٦): لنفرض أن ك زمرة دائرية منتهية رتبتها ن.

إذا كان ص مولد ك، فإن مولدات ك الأخرى هي العناصر التي على الشكل ص<sup>ر</sup> حيث (ن، ر)= ١.





مثال (۱۰):

<7>= {·, ٣, ٢, P}

کذلك (١٤، ١٧)= ٤ من ذلك فإن العدد ٤ يولد زمرة جزئية من  $m_1 = \frac{17}{\epsilon}$ 

هي <٤>= {٠, ٤, ٨}

الأن (۲، ٥)=١

ولهذا فإن ٥ يولد الزمرة ص١٢.

على هذا النحو نجد أن (٦، ١٧)= ٦ وبذلك فإن ٦ يولـد زمـرة جزئيـة مـن  $- \frac{17}{7}$  و وبدلك فإن ٦ يولـد زمـرة جزئيـة مـن  $- \frac{17}{7}$ 

حيث أن (٧، ١٢)= ١، فإن ٧ يولد الزمرة ص١٠٠.

# تمارين

 ١- ضع علامة (صح) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (خطأ) أمام العبارة الخاطئة.

أ- كل زمرة تبديلية لابد أن تكون دائرية.





ب- كل عنصر في الزمرة الدائرية ك يولد الزمرة ك.

جـ- إذا كان ن عدد صحيح موجب، فإنه توجد على الأقل زمرة واحـد
 تبديلية لها الرتبة ن.

Y - لنفرض أ، ك زمرة. إذا كان  $\in \{1, 2, 3\}$  أن  $\{1, 3, 4\}$  ن، فبرهن أن:

ئ =('`) (٠) -أ

ب- (٠) (﴿ ﴿ ﴾ = (٠) (﴿ ﴿ ﴿ ﴿ ﴾ لأَي عدد صحيح جـ.

٣- إذا كانت ك زمرة و ﴿ وَ لَهُ حِيثُ ﴿ ١٠ = هـ، فما هو (٠) (٩)؟

٤- لنفرض أن ك زمرة وأن ﴿، بِ ∈ ك. برهن أنه إذا كان (٠) (٩)= م

و(۱) (ب)=ن وكان (ب= ب فإن (۱) ( (ب)= م ن عندما يكون (م، ن)= ١.

٥- إذا كانت ك زمرة و ﴿ ﴿ كَ حَيث ﴿ ا = هـ، فبرهن أن (٠) ( ﴿ ) م.

### الزمر الجزئية الناظمية Normal Subgroups

لنفرض أن ل زمرة جزئية من الزمرة ك.

إذا كان ﴿ ∈ ك، فإن المجموعة المصاحبة اليمنى ل ﴿ قد لا تساوي المجموعة المصاحبة اليسرى ﴿ ل.

الزمر الجزئية التي مجموعاتها المصاحبة اليمنى تساوي مجموعاتها المصاحبة اليسرى لها أهمية خاصة في نظرية الزمر، لهذا السبب نركز الاهتمـام على هـذا الصنف من الزمر وتعطي أهم النتاقع المتعلقة بتلك الزمر الجزئية.





تعريف: الزمرة الجزئية ن من الزمرة ك تسمى زمرة جزئية ناظمية (Normal) إذا كان نع=عن لكل ∈ع ك.

المبرهنة التالية توضح الشرط المكافئ للتعريف حتى تكون زمرة جزئيـة مـن زمرة ك زمرة جزئية ناظمية.

مبرهنة: ن زمرة جزئية ناظمية من الزمرة ك إذا وإذا كان فقط  $3^{c*}$   $3^{-1}$   $\in$  ن لكل  $\in$  3 ك و ن $^{*}$   $\in$  ن.

### البرمان:

إذا كان ن زمرة جزئية ناظمية من ك وكان ∈ع ك و ن\*∈ ن، فــإن ع<sup>ن\*</sup> ع<sup>-</sup> `∈ ن لأن ن ك= ك ن.

الأن إذا كان ع<sup>ده</sup> ع⁻ ﴿ وَ مَ حِيث ∈ع كَ وَ وَ ۚ ﴿ نَ، فَإِنْكُن ۚ ﴿ نَعَ لَكُمْلُ ∈ع كُ و ن ۚ ﴿ وَ نُ وَهَذَا يَعَنَي أَن *ن ع≤عن*.

إذنعن = نع

وهذا يؤكد أن ن زمرة جزئية ناظمية من ك.

إذا كانت ك زمرة تبديلية، فإن كل زمرها الجزئية تكون زمر جزئية ناظمية، المبرهنة التالية توضح ذلك.

مبرهنة: كل زمرة جزئية من زمرة تبديلية لابد أن تكون ناظمية.





الرهان:

لنفرض أن ن زمرة جزئية من الزمرة التبديليـة ك. لكـل ∈ع ك و ن\*∈ ن نجد أن

وهــذا يعـني أن ع<sup>ره</sup> ع⁻` ∈ ن لكــل ∈ع ك و ن°∈ ن وهــذا يوصــلنا إلى الاستنتاج وهو أن ن زمرة جزئية ناظمية من ك.

المبرهنة السابقة لا تؤدي إلى الاستنتاج وهو:

إذا كانت الزمر الجزئية الفعلية لزمرة ك كلها ناظمية، فإن ك زمرة تبديلية.

هناك زمر غير تبديلية كل زمرها الجزئية الفعلية ناظمية.

### مثال (۱۱):

الجموعة (±١، ±ي، ±ر، ±ج) تحت عملية الضرب المعرفة عليها بحيث:

زمرة غير تبديلية (تسمى زمرة هاملتون).

إذا كانت ل زمرة جزئية فعلية من هذه الزمرة، فإن رتبة ل لابد أن تكون ٢ أو ٤.





على الطالب أن يوضح أنه إذا كانت (١) (ل)= ٢ أو (١) (ل) = ٤، فـــإن ل زمرة جزئية ناظمية.

دليل الزمرة الجزئية ن في ك له علاقة في الحكم على الزمرة الجزئية ن في كونها زمرة جزئية ناظمية، المبرهنة التالية توضع ذلك.

مبرهنة: لنفرض أن ن زمرة جزئية من زمرة ك.

إذا كان [ك: ن] = ٢، فإن ن زمرة جزئية ناظمية من ك.

### البرهان:

لنفرض أن أ ∈ ك إذا كانت المجموعات المصاحبة اليمنى المختلفة للزمرة الجزئية ن في ك هي ن، ن أ، فإن ك=ن∪إن

كذلك فإن المجموعات المصاحبة اليسرى المختلفة للزمرة الجزئية ن في ك هي: ن، أن، وبذلك فإن ك=ن الام

وهذا يؤكد أن ن أ = أن، والذي بدوره برهن أن ن زمرة جزئية ناظمية.

لقد وضحنا سابقاً بأن تقاطع أي تجمع من الزمر الجزئية من زمرة ك همو أيضاً زمرة جزئية من ك، والمبرهنة التالية تعطي نتائج تتعلق بتقاطع الزمر الجزئية الناظمية من ك.

مبرهنة: لنفرض أن ن١، ن٢ زمرتين جزئيتين من زمرة ك.

۱- إذا كان ن، زمـرة جزئيـة ناظميـة مـن ك، فـإن ن، ∩ن، زمـرة جزئيـة ناظمية من ن،

 ۲- إذا كانت كل من ن١، ن، ناظمية من ك، فإن ن، ∩ن، زمرة جزئية ناظمية من ك.



### الرمان:

١- لنفرض أن س ∈ (ن, ∩ن,) وأن ن ۗ ∈ ن٠.

لاحظ أن ن س ن " و ن الأن ن زمرة جزئية ناظمية من ك.

كـذلك ن س ن<sup>-</sup>` ∈ ن، ، لأن ن° ∈ ن، و س ∈ ن، و ن، زمـرة جزئيـة من ك.

هذا يعني أن ن س ن`` ∈ ن.∩ن, والذي مفاده أن ن.∩ن, زمرة جزئيـة ناظمية من ن.

٢- لنفرض أن س ∈ ن، ∩ن..

نستطيع القول بنان عس ن $^{-1} \in 0$ ، لأي عنصر  $g \in \mathbb{R}$  وذلك لأن ن، ناظمية في كل.

کہ لائی منسمر ع  $\in$  ك لأن ن $^*$   $\in$  ن $^*$  لأي منسمر ع  $\in$  ك لأن ن $^*$  ناظمية في ك.

هـذا يعـني أن غ س غ  $^{-1}$   $\in$  ن  $\cap$  ن ,  $\cap$ 

قد لا تكون الزمرة ك أي زمرة جزئية ناظمية عـدا (هـــ) و ك نفسها، وفي هذه الحالة تسمى ك بالزمرة البسيطة (Simple).

المبرهنة السابقة توضح أن التقاطع النهائي للزمر الجزئية الناظمية من ك هـو زمرة جزئية ناظمية من ك، وفي الحقيقة نستطيع تعميم ذلك إلى أن تقاطع أي تجمع من الزمر الجزئية الناظمية من ك هو أيضاً زمرة جزئية ناظمية من ك.





إذا كانت ن زمرة جزئية ناظمية من ك، وإذا كانت ل زمرة جزئية من ك مجيث أن:

#### ن⊂ل⊂ك

فإنه من السهل برهنة أن ن زمرة جزئية ناظمية من ل، ولكن إذا كان جرحه رك حيث أن جا، زمرة جزئية ناظمية من جا، و جا، زمرة جزئية ناظمية من ك، فإن جا، زمرة جزئية من ك ليس من الضروري أن تكون ناظمية في ك، يمعنى آخر كون الزمرة الجزئية ناظمية ليست خاصية انتقالية.

### تمارين

- ا لنفرض أن  $\{ U_a \}$  عائلة من الزمر الجزئية الناظمية من الزمرة ك. بـرهن أن  $\bigcap_a U_a$  زمرة جزئية ناظمية من ك.
- Y Lide of it is  $\{0, -1\}$  (L)  $\{0, -1\}$  (L)  $\{0, -1\}$  (L)  $\{0, -1\}$   $\{0,$
- ٣- إذا كانت ل زمرة جزئية من ك وكانت جـ زمـرة جزئية ناظمية مـن ك.
   فبرهن أن ل جـ= {ل\* جـ: ك\* ∈ ل، جـ\* ∈ جـ}
  - زمرة جزئية ناظمية من الزمرة ك.
- $^3$  لنفرض أن ك زمرة وأن  $^4$   $\in$  ك. مبادل (Commutator) العنصرين  $^4$ ، ب في ك هو  $^4$ , ب  $^4$  =  $^4$   $^4$   $^4$   $^4$   $^6$  ...





١. ﴿ يتبادل مع بِ إذا وإذا كان فقط [ ﴿، بِ]= هـ.

٢. [ ﴿، بِ] `` = [ ﴿، بِ].

□ لنفرض أن ل زمرة جزئية من زمرة ك. إذا كان ن= ١ط١٠ الم برهن أن ن زمرة جزئية ناظمية من ك.

١- إذا كانت ك كما في المثال (١١).

١. كون جدول للزمرة ك.

 برهن أن الزمرة الجزئية ل من ك حيث (١) (ل)=٤ زمرة جزئية ناظمية من ك.

### \* زمر القسمة والتشاكل Quotient Group and Homomorphism

إذا كانت ن زمرة جزئية ناظمية من الزمرة ك، فإن ك/ن= {ع ن: ∈ع ك} تسمى مجموعة القسمة.

إذا كانت ن زمرة جزئية ناظمية من ك، فإن كل مجموعة مصاحبة يمنى هو مجموعة مصاحبة يسرى، ولهذا السبب لا داعي للذكر يسرى أو يمنى في حالة كون ن زمرة جزئية ناظمية.

إذا عرفنا العملية \* على ك/ن حيث أن ع،ن \* ع، ن= (ع، \* ع،) ن فإن الجموعة ك/ن تحت هذه العملية تكون زمرة.

بما أن هـ هو العنصر المحايد في الزمرة ك، فإن هـ ن = ن هـ و العنصر المحايد للمجموعة ك/ن.





من الآن فصاعداً نسقط كتابة العملية \* ونكتب ع،ن ع، ن بـدلاً مـن ع،ن \*ع، ن. حتى تكون العملية معرفة تعريفاً جيداً بجب أن نبين أنه إذا كان:

ل "ن = ل " ن عن = ع ن حيث ع، ع، ل "، ل " فإن ع ل "ن = ع ل " ل

360 = 3 (60) = 3(60) = 3 (60)

= (30) = 300 = 300.

هذا يعني أن العملية معرفة تعريفاً جيداً.

لنفرض أن ع،ن، ع،ن، ع،ن ∈ ك/ن

(3,0 3,0) 3,0= (3,3,0 3,0 = [(3,2,3,3)]0

(3,5,0,0) = 3,0 (3,0,0)

حيث أن ع<sup>- (</sup> ∈ ك، فإنه إذا كانعن ∈ ك/ن، فإن ع<sup>- (</sup>ن ∈ ك/ن هـذا يعني أن

3 5 3-1 5= (3-1 3)5 = 4 5 = 5

وكذلك

3" 030=(3"3)0=40=0

وهذا يعني أن ع- ٰ ن هو نظير العنصر ع ن في ك / ن.

هذا يوضح أن ك/ ن تحت العملية \* تكون زمرة تسمى زمرة القسمة للزمرة ك على ن.





مثال (۱۲):

مجموعة الأعداد الصحيحة ص تحت عملية الجمع زمرة تبديلية.

الزمرة الجزئية

 $^{7}$ ص =  $^{7}$ س:  $_{0}$  (مرة جزئية ناظمية من ص  $^{7}$  الآن ص  $^{7}$  ص =  $^{7}$  +  $^{7}$  ص،  $^{7}$  +  $^{7}$  ص)  $^{7}$  تكون زمرة القسمة للزمرة ص على  $^{7}$ ص .

زمرة القسمة ك/ن ذات أهمية عندما تكون ك زمرة منتهية، والمبرهنة التاليـة توضح ذلك.

إذا كانت ك زمرة دائرية وكانت ن زمرة جزئية من ك، فإن الزمرة ك/ن لابد أن تكون زمرة دائرية أيضاً، لأنه إذا كان أ مولد ك، فإن أن مولد الزمرة ك/ن.

# التشاكل الزمري Groups Homomorphism

الدالة التي تحافظ على البنية الجبرية ذات أهمية في الجبر وتمتاز بـالكثير مـن الحواص الجيدة. في هذا الجزء ندرس الدالـة الـتي تحافظ علـى العمليـة الثنائيـة المعرفة على المعرفة على زمرة ك بحيث تنقلها إلى نفس التأثير بالعمليـة الثنائيـة المعرفـة علـى زمرة أخرى ك.

هذه الدالة تسمى تشاكل (Homomor phism)، وحيث أنها تحافظ على العملية الثنائية المعرفة على الزمرة، فإنها تحافظ على تركيب الزمرة.

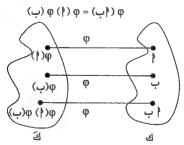




تعریف: الدالة  $\phi$  مـن الزمـرة ك إلى زمـرة أخـرى كَ.  $\phi$ : ك  $\rightarrow$ كَ تـسمى تشاكل من ك إلى ك إذا كان  $\phi$  ( $\phi$  \*  $\phi$  \*  $\phi$  ( $\phi$  )  $\phi$  ( $\phi$  )  $\phi$  ( $\phi$  )  $\phi$  ( $\phi$  )  $\phi$  ( $\phi$  ) اكـل  $\phi$  .

لاحظ أن \* العملية المعرفة على ك، والعملية □ معرفة على ك.

من الآن فصاعداً نسقط العمليتين من الكتابة آخدين في الاعتبار بأن العملية بين عناصر ك هي العملية المعرفة على الزمرة ك، ونكتب:



نعطي الآن بعض الأمثلة على التشاكل الزمري.

مثال (۱۳):

إذا كانت الدالة  $\phi$ : ك  $\longrightarrow$  ك بين الزمرتين ك، ك والمعرفة

φ(١) = مَالكل ١ ∈ ك.

حيث هـ هو العنصر المحايد للزمرة ك.

وضح أن φ تشاكل من الزمرة ك إلى الزمرة كَ.





### :,14

 $\phi$  ( $\{ \psi \}$ ) =  $a^{-}$  =  $a^{-}$   $a^{-}$  =  $\phi$  ( $\{ \}$ )  $\phi$  ( $\psi$ )  $\{ \}$   $\phi$  ( $\{ \}$ )  $\phi$   $\phi$  ( $\{ \}$ )  $\phi$  ( $\{ \}$ )

# مثال (۱٤):

إذا كانت φ: ص ← ص حيث ص زمرة الأعداد الصحيحة تحت عملية الجمع.

تعرف الدالة φ كما يلي:

 $\phi$  (س)= ۲س لكل س $\in$  ص وضح أن  $\phi$  تشاكل.

#### :, 141

 $\Phi\left(\omega+\omega\right)=Y(\omega+\omega)=Y(\omega+\omega)=Y(\omega+\phi)$ 

وهذا يوضح أن φ تشاكل من ص إلى نفسها.

### مثال (۱۵):

لنفرض أن √ مي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة تحت عملية المضرب، وأن √ هي مجموعة الأعداد الحقيقية تحت عملية الجمع.

إذا كانت φ: ٦٠٠٠.

والمعرفة  $\phi(w)$ = اور س لكل س  $\in \mathcal{T}^+$ .

وضح أن  $\phi$  تشاكل من الزمرة ( $\zeta^+$ ،  $^+$ ) إلى الزمرة ( $\zeta^-$ ،  $^+$ ).





: 12

$$\varphi(\omega, \omega) = \xi_{\alpha}(\omega, \omega) = \xi_{\alpha}(\omega, \omega) + \xi_{\alpha}(\omega) + \varphi(\omega) + \varphi(\omega)$$
 $e^{i} = \xi_{\alpha}(\omega, \omega) + \varphi(\omega) + \varphi(\omega) + \varphi(\omega) + \varphi(\omega)$ 

مثال (۱٦):

فإن م٢٠٢ تحت عملية ضرب المصفوفات تكون زمرة، وإذا كانت حَ مجموعة الأعداد الحقيقية عدا الصفر فإن حَ تحت عملية الضرب تكون زمرة. إذا كانت

$$\phi\colon q_{Y\times Y} \to \mathcal{T}^{\bullet} \text{ age is 2al ubs} \colon \phi = \left(\begin{bmatrix} q & \nu \\ - & \nu \end{bmatrix}\right) = \left(c - \nu - \mu - \nu \right)$$

المصفوفة أ، وبالتالي نستطيع القول بأن φ دالة من مجموعة المصفوفات أ من نوع ٢×٢ والتي محددتها لا تساوي صفر إلى محددتها.

$$\phi$$
 (أب)= |أب| = |أ |ب| (من خواص المحلدة)  
=  $\phi$  (أ  $\phi$  (  $\phi$  (  $\phi$  )

وهذا يوضح أن φ تشاكل من م٢×٢ إلى ح\*.





مثال (۱۷):

إذا كانت (ح، +) زمرة الأعداد الحقيقية تحت عملية الجمع، وكانت (ح٠، ٠) زمرة كل الأعداد الحقيقية عدا الصفر تحت عملية الضرب.

نعرف الدالة  $\phi: \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}^*$  بالصيغة  $\phi(m)=\Upsilon^{o}$  لكل  $m\in \sigma$ .

وضح أن φ تشاكل من ح إلى ح°.

### الحل:

 $\phi \; (\omega + \omega) = \Upsilon^{\omega + \omega} = \Upsilon^{\omega} \; \Upsilon^{\omega} = \varphi \; (\omega) \; \varphi(\omega)$ 

وهذا يوضح أن φ تشاكل من ح إلى ح".

إذا كانت φ تشاكل من الزمرة ك إلى نفسها، فإنها تسمى تشاكل داخلي (endomorphism) من الأمثلة العديدة التي يمكن اشتقاقها للحصول على تشاكل رمزي تنتج من المبرهنة التالية:

مبرهنة: لنفرض أن ن زمرة جزئية ناظمية من الزمرة ك. الدائمة  $\phi$ : ك  $\rightarrow$  ك/ن. والمعرفة  $\phi(3)$ = عن لكل  $\in$  3- تعطي تشاكل فوقي يسمى التشاكل الطبيعي. البرهان:

الدالة φ دالة فوقية نباتج من أنه لكلع ن ∈ ك/ن هناك ∈عك حيث ه(ع)=ع ن الأن.

$$\varphi(3_1 \ 3_7) = (3_1 \ 3_7) = [(3_1 \ 0) \ (3_7 \ 0)]$$

 $= \phi(3_1) \phi(3_2)$  (2)  $(3_1, 3_2) \in L$ .

وهذا يوضح أن φ تشاكل فوقى من ك إلى ك/ ن





التشاكل الزمري يحافظ على العنصر المحايد وكذلك يحافظ على نظير العنصر، المرهنة التالية توضح ذلك.

مبرهنة: إذا كان φ تشاكل من الزمرة ك إلى الزمرة ك، فإن:

ا- φ(هـ)= هـُ العنصر الحايد في ك و هـُ العنصر الحايد في كُ.

 $\gamma - \phi (\varsigma^{-1}) = (\phi(\varsigma))^{-1}$ .

### البرهان:

 $\phi$  (ع هـ) =  $\phi$  (ع هـ)  $\phi$  (هـ) مـ –  $\phi$  (ع هـ)  $\phi$  (هـ) النفرض أن ع  $\phi$  (هـ)

ومن قانون الاختصار نصل إلى أن φ (هــ) = هــُــ

 $\Delta = (\Delta) \phi = (\gamma^{-} \xi) \phi = (\gamma^{-} \xi) \phi (\Delta) = -\gamma$ 

وكذلك

 $\phi$  (3)  $\phi$  (3)  $\phi$  (4)  $\phi$  (4)  $\phi$  (4)  $\phi$ 

وهذا يعني أن:

 $\phi$  (ع $^{-1}$ ) هو نظير العنصر  $\phi$ (ع)، أي أن  $\phi$  (ع $^{-1}$ ) =  $(\phi(3))^{-1}$ .

تأثير التشاكل على الزمر الجزئيـة للزمـرة ك، وكـذلك تـأثير التـشاكل علـى الزمر الجزئية للزمرة كَ يدرس في المبرهنة التالية.

مبرهنة: إذا كان φ تشاكل من الزمرة ك إلى الزمرة ك، فإن:

 $\phi = 0$  (ل) زمرة جزئية من ك لكل زمرة جزئية ل من ك.

 $\phi^{-1}$  (جم) زمرة جزئية من ك لكل زمرة جزئية جم من ك.



I should like the

البرهان:

-1 من المعلوم أن  $\phi(b) = \{\phi(b^*) \colon b^* \in b\}$ 

لنفرض أن φ(ك, )، φ(ك, )∈φ(ك)

هذا يعني أن ك, م ك, ول وبذلك يكون ك, ك, ول لأن ل زمرة جزئية من ك. الآن

 $\phi\left(L^{,\,\circ}\right)\!\!\left(\phi\!\left(L^{,\,\circ}\right)\!\right)^{-\prime}=\phi\left(L^{,\,\circ}\right)\phi\left(L^{,\,\circ}\right)^{-\prime})=\phi\left(L^{,\,\circ}\right)^{-\prime}\right)\in\phi\left(L^{,\,\circ}\right)$ 

إذن φ(ل) زمرة جزئية من ك.

Y- من المعلوم أن  $\phi^{-1}(ج)=\{g\in E: \phi(g)\in F\}$ 

الأن

إذا كان ع،، ع،  $\varphi \in \varphi^{-1}(-)$ ، فإن  $\varphi(3)$ ،  $\varphi(3) \in +$ 

وحيث أن جـ زمرة جزئية من ك، فإن:

 $φ(3_i) φ(3_7)^{-i} ∈ -$ 

 $('_{\tau} ) \phi(3,) \phi(3,)' = \phi(3,) \phi(3,')$ ولکن  $\phi(3,) \phi(3,)' = \phi(3,) \phi(3,')$ 

( + E &) p=

وهذا يعني أن ع.ع. ح. (جـ) وبالتالي φ َ ا (جـ) زمرة جزئية من ك.

السؤال الآن هو: ماذا يحصل لو وضعنا في المبرهنة السابقة جملة زمرة جزئيـة ناظمية مكان الجملة زم ة جزئة؟

ناظميه محال الجملة رمره جزئيه

الإجابة على هذا السؤال في النتيجة التالية.





نتيجة (١): إذا كان φ تشاكل من الزمرة ك إلى الزمرة ك، فإن:

 $\phi = 0$  (ل) زمرة جزئية ناظمية من ك لكل زمرة جزئية ناظمية ل مـن ك عندما يكون  $\phi$  تشاكل فوقى.

 $\phi - \gamma'$  (جـ) زمرة جزئية ناظمية من ك لكل زمرة جزئية ناظمية جـ مـن ك أكل زمرة جزئية ناظمية جـ مـن ك أ

إذا كان  $\phi$ : ك  $\rightarrow$  ك تشاكل رمزي، فإن هناك مجموعة جزئية من ك ذات أهمية تحت تأثير التشاكل  $\phi$ ، وهذه المجموعة تسمى نواة التشاكل.

تعريف: إذا كمان φ تشاكل مـن الزمـرة ك إلى الزمـرة كَ، فــإن مجموعــة العناصر في ك والتي تعطى تحت تــاثير الـشكل φ العنـصر المحايــد في كَ تسمى نواة التشاكل (Kernal of)، ويرمز لها بالرمز نواة (φ).

نواة (φ)= {س∈ك: φ(س)= هــــ}

من الملاحظ أن نواة (φ) مجموعة غير خالية لأي تشاكل φ لأنها تحتوي على الأقل على العنصر المحايد هـ في ك.

تطبيق النتيجة السابقة على نواة (φ) يمكن أن يوصلنا إلى أن نواة (φ) زمـرة جزئية ناظمية من ك، لأن:

ويمكن توضيح ذلك بطريقة أخرى وهي:

إذا كان جد ∈ نواة (φ) ، ع ∈ك فإن:

φ (ع جـع - ') = φ (ع) φ(جـ) φ(ع - ')





$$= \phi(3) = \phi(3) = \phi(3) = \phi(3) = a$$

إذنعجـع⁻` ∈ نواة (φ) وهذا يبرهن أن نواة (φ) زمرة جزئية ناظمية مـن

ك.

نتيجة (٢): إذا كان φ تشاكل من الزمرة ك إلى الزمرة ك، فإن نواة (φ) زمرة جزئية نظامية من ك.

نواة التشاكل تستخدم في الحكم على أن التشاكل أحـادي أو غـير أحـادي، والمبرهنة التالية توضح ذلك.

مبرهنة: إذا كان  $\phi$  تشاكل زمري، فإن  $\phi$  تشاكل أحادي إذا وإذا كان فقيط نبواة  $(\phi)$  =  $\{a_-\}$ 

### البرهان:

إذا كان  $\phi$  تشاكل أحادي وكان  $\phi$  ( $\phi$ )، فإن  $\phi$ ( $\phi$ ) هـ ولكـن  $\phi$ (هـ)= هـ  $\phi$ (هـ)= هـ وهـن وهذا يعني أن  $\phi$ (هـ)=  $\phi$ ( $\phi$ ) والذي بـدوره يـوّدي إلى أن  $\phi$  = هـ وبذلك يكون الاستنتاج نـواة ( $\phi$ )= {هـ} قـد حـصل. الآن لنفـرض أن نـواة  $\phi$ )= {هـ}.

إذا كان:

 $\phi(_{3'}) = \phi(_{3'}) \text{ if } \phi(_{3'}) = \phi(_{3'}) = \phi(_{3'})$ 

 $\tilde{\varphi}(\beta_r)\varphi(\beta_r)^{-r}=\tilde{A}$ 

وهذا يعني أن ع، ع $abla \in \{0\}$  إذن ع، ع $abla = \{0\}$  [د نواة ( $abla = \{0\}$ ] إذن ع، ع $abla = \{0\}$  أحادى.





عرفنا في السابق أن نواة التشاكل زمرة جزئية ناظمية، وفي الحقيقة نستطيع قول أكثر من ذلك، وهو أن أي زمرة جزئية ناظمية هي نواة تشاكل زمري، بمعنى آخر إذا كانت ن زمرة جزئية ناظمية من الزمرة ك، فإنه يمكن تعريف تشاكل فوقى  $\phi$ : ك  $\longrightarrow$  ك/ ن

جيث تكون نواته الزمرة الحزثية الناظمية ن. واضبح أن φ: ك  $\longrightarrow$  ك/ن φ(3)=3ن يعرف تشاكل فوقي.

الآن لنفرض أن ع ∈ نواة (φ).

هذا يعني أن  $\phi(3)=3$  ن = ن، ومن ذلك نستطيع القول بأن  $\in 3$ ن، ومن ذلك نصل إلى نواة  $(\phi)\in 0$ ، والرجوع في نفس الطريق برهن أن  $0\in 0$  نواة 0 والذي بدوره يوصلنا إلى أن نواة 0:

عندما يكون التشاكل الزمري φ:  $b \rightarrow b$  أحادي، فإنه يمكن النظر إلى b: φ(b) بأنهما ذات تركيب جبري واحد، وله أن السبب نعطي تعريف خماص للتشاكل الأحادي.

تعریف: إذا كان  $\varphi$  تشاكل زمري من الزمرة ك إلى الزمرة ك، فإن  $\varphi$ : ك  $\rightarrow$  ك يسمى تشاكل تقابلى (Isomor phism) إذا كانت  $\varphi$  دالة أحادية.

إذا كان هنــاك تــشاكل تقــابلي فــوق φ مــن كــ إلى كـُ، فــإن الزمرتــان ك، كُ متشاكلتين تقابلياً ويرمز لذلك ك ≈ ك.

عرفنا من مبرهنة سابقة بأن التشاكل φ مـن الزمـرة ك إلى الزمـرة كَ يكــون تشاكل تشاكل تقابلي إذا وإذا كان فقط نواة (φ)= {هــ}.





المبرهنة التالية توضح العلاقة بين نواة التشاكل الفوقي وزمرة القسمة والـ في تسمى النظرية الأساسية للتشاكل.

نظرية: (النظرية الأساسية للتشاكل)
إذا كانت ك، كَ زمرتان وكان φ: ك

- ك.

تشاكل فوقي نواته جـ، فإن

الزمرتان ك/ج، ك متشاكلتان

تقابلياً، أي أن ك/ج = ك في الكراج ا

### البرهان:

وضحنا فيما سبق أن  $\psi$ : ك  $\rightarrow$  ك/ جـ تشاكل فوقى،

وأطلقنا عليه اسم التشاكل الطبيعي.

الآن نعرف دالة ق من الزمرة ك/ جـ إلى الزمرة ك

وذلك كما يلي: لكل عجـ ∈ ك/ جـ، فإن ق(ع جـ)= φ(ع)

أولاً نوضح أن ق معرفة تعريفاً جيداً.

إذا كان ع جـ = ع جـ حيث ع، ع  $\in$  ك، فإن ق(ع جـ) = ق(ع جـ)، وهذا يعنى أن  $\phi(3) = \phi(3)$  إذن الدالة ق معرفة تعريفاً جيداً.

لنبرهن الآن أن ق دالة فوقية، نفرض أن ع ∈ ك.

إذن هناك ع  $\in$  ك حيث  $\phi(3)$ = ع لأن  $\phi$  دالة فوقية، وهذا يعنى أن:





إذن لكل ع ∈ ك هناك ع جـ ∈ ك/جـ حيث ق (ع جـ) = ع

علينا الآن أن نبرهن أن ق تشاكل.

 $\tilde{\upsilon}(\mathcal{Z}_1 \leftarrow \mathcal{Z}_2 \leftarrow) = \tilde{\upsilon}((\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2) \leftarrow) = \phi(\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2) = \phi(\mathcal{Z}_1)$ 

= ق(ع، ج) (ع،ج)

وهذا يعني أن ق تشاكل. لتكملة البرهان بقي علينا أن نبرهن أن ق دالـة أحادية.

لنفرض أن ع جـ ∈ نواة (ق).

هذا يعني أن ق(ع جـ)= هـَ ولكن ق(ع جـ)= φ(ع)، ومن ذلك نصل إلى أن φ(ع)= هـُ وهذا يعني أن ع ∈ نواة (φ) = جـ.

هذا الاستنتاج يعني أن ع جـ= جــ

والذي مفاده أن نواة (ق)≈ جـ وهو العنصر الحايد في ك/ جـ إذن ق دالة أحادية.

وضع كل هذه الأجزاء معاً يوصلنا إلى اكتمـال برهـان ن ق تـشاكل تقـابلي فوقي من ك/جـ إلى ك، أي أن ك/جـ ≈ ك.

ملاحظة: إذا كان التشاكل  $\phi$ : ك ightarrow ك غير فوقي، فإن ك/ جـ pprox تقابل ك.

مثال (۱۸):

لنفرض أن  $\phi$ : (ص، +)  $\longrightarrow$  ({۱، -۱}، ۰)





حيث أن:

$$\phi(\dot{\upsilon})=\begin{cases} 1 & \text{if } 0 \ \text{otherwise} \end{cases}$$
 وضح أن  $\phi$  تشاكل فوقي.

لنفرض أن ع، هي مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية، وأن ص، مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية من الواضح أن:

$$(\phi)=\phi$$
 و س الآن ص نواة  $(\phi)=\phi$  س  $(\phi)=\phi$ 

وذلك من المبرهنة السابقة التي تضمن هذا التشاكل التقابلي الفوقي.

عكن تعريف هذا التشاكل كما يلي:

$$1 - = (1) \varphi = (1 + 2 - 1) = (1) = -1$$

مثال (۱۹):

لنفرض أن ك زمرة وأن أ ∈ ك.

الدالة  $\phi$ : ص $\rightarrow$  < أ> والمعرفة  $\phi$  (ن)= أ

تشاكل فوقي من الزمرة ص تحت عملية الجمع إلى الزمرة الجزئية الدائرية < إ> من ك.

نستطيع استنتاج أن ص/ نواة (φ)= <٩>.

هناك احتمالات يمكن دراستها:

١- إذا كان نواة (φ)= {٠} هذا يعني أن {ن∈ص: إ<sup>ن</sup>= هـ} = {٠}





وبذلك يكون للعنصر ﴿ رَبَّةِ لانهائية وتكون ص/ نواة (۞) هي الزمرة ص.

هذا يوصلنا إلى استنتاج أن أي زمرة دائرية لا نهائية هي في الحقيقة الزمـرة ص تحت عملية الجمم.

 $Y - ieli (\phi) \neq \{ \cdot \}$ . هذا يعني أن هناك أصغر عدد صحيح موجب حيث أن  $\{ \cdot \} = \alpha$  و و فيذلك يكو ن نواة ( $\{ \cdot \} = - iele \}$ .

هذا يعني أن صن= ص/ نواة (φ) ويكون الاستنتاج هو أن أي زمرة دائرية منتهية هي في حقيقتها صن حيث ن رتبة مولد الزمرة الدائرية <إ>>.

هذه النتيجة تقودنا إلى أن أي زمرتان دائريتان لهما نفس الرتبة متشاكلتان تقابلياً.

إذا كان  $\phi$ : ك  $\longrightarrow$  ك تشاكل زمري داخلي وإضافة إلى ذلك يكون  $\phi$  تشاكل تقابلي فوقي، فإنه يسمى في هذه الحالة تشاكل تقابلي ذاتي (automorphism).

لنفرض أن ك زمرة وأن ∈ إك.

الدالة  $\phi_1\colon b \to b$  والمعرفة  $\phi_1(س)=\{m,q^{-1}\}$  لكل س ك تعتبر تشاكل داخلي.

إذا كان س١، س١ ∈ ك، فإن:

φ ((س د س ۲) = ((س د س ۲) و

= ((س، ا<sup>-۱</sup> (س») ا<sup>-۱</sup>

 $= \langle (\omega, | \psi_{-1}) \rangle = (\psi_{-1}) \rangle = (\psi_{-1}$ 

لاحظ أن φر دالة فوقية لأنه لكل س ∈ك.





هناك أ"س أ ∈ ك حيث أن φ(أ"سأ) = س.

إذا كان  $\phi_1(m_1)=\phi_1(m_2)$ ، فإن  $\phi_1(m_1)^{-1}=\phi_1$  ومن قانون الاختصار نصل إلى أن  $\phi_1(m_1)=\phi_1$ ، وهذا يعنى أن  $\phi_1$  دالة أحادية.

مثل هذا التشاكل (تشاكل تقابلي فوقي داخلي يسمى تـشاكل تقـابلي ذاتـي داخلي) (inner automorphism).

يرمز لمجموعة التشاكلات التقابلية الذاتية الداخلية للزمـرة ك بـالرمز داخلـي (ك)، أي أن:

داخلي (ك)= {مٍ: ﴿ وك}

إذا كانت ك زمرة تبديلية، فإن داخلي (ك) تحتوي على التشاكل المحايد ل: ك  $\rightarrow$  ك حيث (0,0)=0 لكل 0

إذا عرفنا على داخلي (ك) عملية تركيب الدوال فإن (داخلي (ك)، ∈ () تصبح زمرة.

إذا كان م، م ب ∈ داخلي (ك) فإن:

$$(^{1}$$
 $\phi \circ \phi) = ((\phi) (\phi) = \phi) (\phi \circ \phi)$ 

$$(-1)^{-1} = (-1)^{-1} = (-1)^{-1} = (-1)^{-1} = \phi_{1}$$

وهذا يعني أن φ<sub>1</sub> ∘ φ<sub>ب</sub>= φ<sub>1</sub>,، ويذلك تكون المجموعة داخـل (ك) مغلقـة تحت العملية °.

إذا كان هـ هو العنصر المحايد في ك، فإن  $\phi_{\rm L}$  (س)= هـ س هـ  $^{-1}$ = س ومن ذلك نجد أن  $(\phi_{\rm L}\circ\phi_{\rm L})$  ومن ذلك نجد أن  $\phi_{\rm L}\circ\phi_{\rm L}$ 





$$(\phi_{\scriptscriptstyle L} \circ \phi_{\scriptscriptstyle I})_{\scriptscriptstyle M} = \phi_{\scriptscriptstyle L} (f_{\scriptscriptstyle M} f^{-1}) = f_{\scriptscriptstyle M} f^{-1} = \phi_{\scriptscriptstyle I}(m)$$

هذا يعني أن φ. هو العنصر المحايد للمجموعة داخل (ك) تحت العملية ٠.

إذا كان أ ∈ ك، فإن:

$$(\phi_{1-1} \circ \phi_{1})_{m} = (\phi_{1-1} \circ \phi_{1})_{m}$$

$$= \phi^{-1} (\phi_{1} \circ \phi_{1})^{-1} = \phi_{1} = \phi_{2}(\phi_{1})$$

كذلك:

$$(\phi_1 \circ \phi_{-1})_{m} = \phi_1 (q^{-1}_{m} q) = q^{-1}_{m} q^{-1} = m = \phi_{L}(m)$$
 $(\phi_1 \circ \phi_{-1})_{m} = \phi_1 (q^{-1}_{m} q) = q^{-1}_{m}$ 
 $(\phi_1 \circ \phi_1)_{m} = \phi_2 (q^{-1}_{m} q)$ 

من هذا كله نصل إلى أن (داخل (ك)، ٥) زمرة.

بصفة هامة، فإن مجموعة التشاكلات التقابلية الذاتية على الزمرة ك، والـ ي يرمز لها بالرمز ذاتية (ك) تحت حملية الدوال تكون زمرة.

لاحظ أن داخل (ك) زمرة جزئية من الزمرة ذاتية (ك)، وإضافة إلى ذلك فإن داخل (ك) زمرة جزئية ناظمية من الزمرة ذاتية (ك).

كون داخل (ك) زمرة جزئية من ذاتية (ك) قد تم برهنته.

الآن لنفسرض أن  $\Psi \in \text{ذاتيسة (ك) وأن <math>\rho_0 \in \text{داخسل (ك)}$ ، ولنفسرض أن  $\phi \in \mathbb{C}$ .





$$\Psi = \Psi (\uparrow) \cup \Psi (\uparrow^{-\prime}) = \varphi_{\Psi(\uparrow)} (\downarrow)$$

إذن:

Ψ ∘ φ ، Φ • ۲ € داخل (ك)

وهذا برهان أن داخل (ك) زمرة جزئية ناظمية من ذاتية (ك).

تعرفنا أن أ (س) وهي مجموعة الدوال الأحادية والفوقية من س إلى نفسها، وعرفنا على أ(س) عملية تركيب الدوال ٥، ومن ذلك نستنتج أن (أ(س)، ٥) زمرة.

إذا كانت ك زمرة، فيمكن تعريف

لو: ك  $\rightarrow$  ك حيث  $b_1(m)=\{(m) | b \}$  ك ميث لورس = ك.

لاحظ أن لم دالة أحادية وفوقية من ك إلى نفسها.

عن طريق مثل هذه الدوال نستطيع تعريف  $\phi$ : ك  $\rightarrow$  أ (ك)

جيث أن φ(١) = أا لكل ١ ∈ ك.

لاحظ أن:

$$(i_{\uparrow} \circ i_{\downarrow}) m = i_{\uparrow} (i_{\downarrow}(m)) = i_{\uparrow}(i_{\downarrow} m)$$

$$= (i_{\uparrow}) m = i_{\uparrow}(m) \text{ (ib) } m \in \mathbb{D}$$

هذا يعني أن لم ٥ لب= لم.

الآن نبرهن أن  $\phi$  تشاكل تقابلي  $\phi$  (  $\phi$  ب)= ل  $\phi$  (  $\phi$  ب)  $\phi$  (  $\phi$  ب)  $\phi$  (  $\phi$  ب)





وهذا يعني أن φ تشاكل من ك إلى أ(ك).

الآن إذا كان  $\phi(1) = \phi(\mu)$  فإن ذلك يعنى أن  $\psi(1) = \psi$ 

ولكن (= ل (هـ)= ل (هـ)= ب

وهذا يوضح أن φ دالة أحادية. هذا النقاش يوصلنا إلى المبرهنة التالية:

مبرهنة: (نظرية كيلي)

كل زمرة ك متشاكلة تقابلياً مع زمرة جزئية من أ (س) لمجموعة مناسبة س.

في النقاش السابق للمبرهنة لا نستطيع مبرهنة أن Φ تـشاكل فــوقي لأنــه إذا كانت كــ زمرة منتهية عدد عناصــرها ن حيـث ن٢٢، فــإن عــدد عناصــرها أ(ك) يساوي ن! وتعرف جيداً أن ن!>ن.

إذا كانت ك زمرة منتهية برتبة ن، فإنها تكون متشاكلة مع زمـرة جزئيـة مـن سن لمجموعة مناسبة س، وهذه نتيجة واضحة من مبرهنة كيلي.

### تمارين

١- لنفرض أن ل زمرة جزئية ناظمية من زمرة منتهية ك.

برهن أن (٠)( إلى حيث إل في ك/ل قاسم لرتبة العنصر إحيث وإك.

Y- لنفرض أن ك زمرة. برهن أن ك زمرة تبديلية إذا وإذا كانت فقط الدالة  $\varphi$ :  $\Phi$  ك  $\to$  ك والمعرفة  $\varphi(\phi)=\phi^{-1}$  تشاكل فوقى.

 $\phi$  إذا كانت ك زمرة، وكان  $\phi$ : ك  $\to$  ك تشاكل، فبرهن أن:

 $b=\{ \{ \in E: \phi(\{\})=\emptyset \} \}$  زمرة جزئية من ك.





٤- لنفرض أن ص، زمرة الأعداد الصحيحة تحت عملية الجمع مقياس ^،
 وأن ك= <</li>
 إمرة دائرية رتبتها ١٢. برهن أن الدالة:

φ: φ. → Δ, والمعرفة φ(ΰ)= ΰ<sup>νι</sup> تشاكل وحدد نواة <math>φ

 $\phi$ - إذا كانت  $\phi$ : ك  $\rightarrow$  ك تشاكل فوقي، وكانت ك زمرة بسيطة، فبرهن أن:  $b \approx b$  أو أن  $\phi(f)=a$  ك  $f \in b$ 



# تمارين عامة

- ۱- لنفرض أن ك زمرة. برهن أن ك زمرة تبديلية إذا وإذا كان فقط (  $\{ \psi \}^{V} = \{ Y^{V} \mid Y \}$  ككل  $\{ Y^{V} \mid Y \}$
- Y لنفرض أن ك زمر منتهية. برهن أن إذا كان (١) (ك) عدد زوجي، فإن ك تحتوي على عنصر  $4 \neq a$  هـ حيث  $4 \neq a$
- ٣- إذا كان ص١٠ زمرة الأعداد الصحيحة تحت عملية الجمع مقياس ١٦، فرهن أن ل= (٠٠ ٤، ٨، ١٦) زمرة جزئية من ك.
- إذا كان ل زمرة جزئية من زمرة ك، وع زمرة جزئية من ل، فبرهن أن ع
   زمرة جزئية من ك.
  - ٥- لنفرض أن ل زمرة جزئية من زمرة تبديلية ك.
  - برهن أن  $:=\{m\in \mathbb{C}: m^{6}\in \mathbb{D}: 0\in m\}$  زمرة جزئية من  $\mathbb{C}$ .
- T— لنفرض أن  $U \neq \Phi$  مجموعة جزئية من زمرة ك. إذا كانت U معلقة تحت عملية الزمرة ك، وكل عنصر في U له رتبة نهائية، فبرهن أن U زمرة جزئية من U.
  - لنفرض أن ك زمرة تبديلية، وأن ن عدد صحيح ثابت برهن أن:
    - ل،= { أ ∈ ك: (٠) (١)/ن} زمرة جزئية من ك.
    - -4 لنفرض أن ل زمرة جزئية عن زمرة ك. إذا كانت  $(0) = \{ \{ \in \mathbb{R} : \{ \{ \}^{-1} = b \} \} \}$  فبرهن أن  $(0) = \{ \{ \{ \}^{-1} = b \} \} \}$







٩- لنفرض أن ك= < إ > زمرة دائرية رتبتها ١٥، وأن

U= < ( > > كون جدول للزمرة ك/ ل.

 إذا كانت ل زمرة جزئية ناظمية من الزمرة ك، فبرهن أن ك/ل زمرة تبديلة إذا كانت ك تبديلية.

إذا كانت ل زمرة جزئية ناظمية من زمرة دائرية ك، فبرهن أن
 ك/ل زمرة دائرية.

۱۲ – لنفرض أن ك زمرة وأن  $\phi$ : ك  $\rightarrow$  ك دالـة فوقيـة حيث  $\phi(q) = q^{-1}$  برهن أن:

φ تشاكل تقابلي ذاتي إذا وإذا كانت فقط ك زمرة تبديلية.

۱۳ – لنفرض أن ك، ك زمرتان، وأن  $\phi$ : ك  $\longrightarrow$  ك تشاكل فوقي.

تحقق من الجمل التالية:

اً – إذا كانت ل،ع زمرتان جزئيتان من ك بحيث أن نواة  $(\phi) \subseteq L \cap 3$ ، فإن  $(L \cap A) = \phi(L) \cap \phi(A)$ 

ب- إذا كانت ل زمرة جزئية من ك، فإن:

 $(\phi(b)) = b(b)$ ق ( $\phi(b)$ ) = المرافواة

1- إذا كانت  $\phi$ :  $b \to \infty$ ، تشاكل فوقي من الزمرة b إلى زمرة الأعداد الصحيحة تحت عملية الجمع مقياس  $^{\Lambda}$ ، فبرهن أن b أن أراد وزية جزئية ناظمية ن حيث أن [b: b: b:

۱۰ لنفرض أن ل ع زمرتان جزئيتان ناظميتان من زمرة ك بحيث أن ل -10 ل

برهن أن أب = ب ألكل أ ∈ ل و ب ∈ ع.





التكامل غير الحدد



# الفصل الخامس التكامل غير المحدد

# تعريف التابع الأصلى:

نقول عن ق أنه تابعاً أصلياً لـ ق إذا كـان ق َ عق وسنرمز لـ ه بالـصيغة قس)= {ق صعطينا التابع ق(س) ونقول أن التكامل غير المحدد لـ ق سيعطينا التابع ق(س) أو نقول أن التابع القرص أو نقول أن التابع الأصلي لـ ق هو ق.

تمهيد: إن عملية البحث عن التابع الأصلي لتابع ق معطى تمثل العملية المعاكسة لعملية إيجاد مشتق للتابع فنحن هنا نحاول أن نوجـد تـابع مـشتقة هـو التابع المعطى ق وهذه العملية هي العملية التي أسميناها التكامل غير المحدد.

#### ملاحظات هامة:

\( - \) إذا كان ق تابعاً أصلياً لـ ق فإن ق ليس وحيداً ذلك ألن ق+جـ أيضاً تابعاً أصلياً لـ ق حيث جـ = وذلك أن (ق+جـ) = ق + جـ = ق + = ق + = ق .

٢- باعتبار أن التكامل غير المحدد عملية معاكسة لعملية الاشتقاق وبالأحد.
 بعين الاعتبار تعريف التابع الأصلي.

 $\tilde{c} = \frac{c\tilde{b}}{c\omega} - \frac{c\tilde{b}}{c\omega} \cdot (\omega - \tilde{b}) \cdot (\omega -$ 





## خواص التكامل غير المحدد:

إذا كان ق تابعاً أصلياً لـ ك، ق تابعاً أصلياً لـ ل عندئد فإن ق+ك عشل
 تابعاً أصلياً ق+ل ذلك لأن (ق+ك) = ق + ك = ق + ل.

 $\gamma$  إذا كان ق تابعاً أصلياً لـ ق وكـان  $\alpha$   $\in$  ح عند الله فـ إن  $\alpha$  . ق هـ و تــابع أصلي للتابع  $\alpha$  . ق ذلك أن  $\alpha$  . ق $\alpha$  =  $\alpha$  .  $\alpha$  .  $\alpha$ 

 $^{*}$ - يمكن تعميم الخاصتين أعلاه حتى عدد منته من التوابع حيث أنه إذا كان قى تابعاً أصلياً لل قَ وعند فله في تابعاً  $^{*}$  الأصلياً لل التسابع  $^{*}$   $^{*$ 

أخيراً يمكن اعتماداً على الخواص كتابة العلاقات التالية:

١- أق+لس).دس=إقس).دس+إل(س)دس

 $\alpha$ ان (س)دس= $\alpha$ ان (س)دس $\alpha$ 

۳ - ∫ ه ف+B لس).دس=α . ∫ ق س) دس+B . ال (س) دس

# جدول التكاملات البسيطة

يمكننا الآن إيراد جدول مماثل لما أوردناه في الفصل الثاني ص وذلك فقـط بالنظر إلى التابع الأصلي كتابعاً مشتقة التابع المعطى ق.



Hand Italian

التابع	التابع الأصلي
س س	÷+ 1+0 0 A
ه_س	هـ" + جـ
<u>'</u>	ئو <sub>م</sub> س +جـ
<b>~</b> p	<del>ا</del> ب + جـ
جا س	– جتا س + جــ
جتا س	جا س + جـ
ا جتاء س	ظا س + جـ
ا کیا تھی	– ظتا س + جـ
1 V - W	– قوس (جتا س) + جــ
۱ ۲+س+۱	- قوس (ظتا س + جــ)
جا (قطع) س	جتا (قطع) س + جــ
جتا (قطع) س	جا (قطع) س + أ
ا جا <sup>ر</sup> ( قطع) س	ظا (قطع) س + أ
ا جتاء (قطع)س	ظتا (قطع) س + جــ

The state of the s
القميل الشامين
m

التابع	التابع الأصلي
1-1 vol	قوس جتا (قطع) س + جــ
1 - W	– قوس ظتا (قطع) س + جـ

تسمى هذه التكاملات تكاملات أساسية بسيطة شهيرة.

الآن سوف نتعلم طرائق متقدمة في حساب أي تكامل غير محدد.

# ١ - الطريقة الأولى طريقة تغير المتحول

إذا كان لدينا تابعاً ما مثل ق محيث أن التكامل المطلوب

هو

3=[E(L(n))] عند له فإنسا مسوف نجري تغییر المتحول من س إلى ت حیث x=L(n) ومن ثم سوف نحسب التفاضل للعبارة الأخیرة بالشكل x=L(n). د x=L(n) د x=L(n) د من ومن ثم نحسب قیمة دس بدلالة x=L(n) علیه في التكامل x=L(n) ليصبح:

وباختيار مناسب قد نحصل على تكامل بسيط.

مثال: احسب التكامل ع= إ ظاس.دس

الآن مملاحظة أن ع= إ ظاس دس = إجاس دس





وبافتراض ت= جتا س  $\Longrightarrow$  دت = - حاس . دس  $\Longrightarrow$  د $\omega = \frac{\text{دن}}{\text{-جاس}}$ 

 $\frac{c \dot{v}}{v}$ الآن بملاحظة التكامل ع= $\frac{e^{l} \dot{v}}{v}$ .

=>ع=∫ الم ت+ج=- لور جناس+جـ

مثال: ع= $\int \frac{u}{u} \frac{u}{u}$  ولنفرض من أجل هذا التكامل ت= لوم س

ت= الس على دس س. دت الس

الآن لنعوض في التكامل

مثال: ع=إس.مس<sup>"</sup>.دس

 $\frac{cr}{m}$  دس= دس حد دس دس حد دس

الآن لنعوض في التكامل

$$3=\int \omega_{1}\omega_{2}^{2}\frac{1}{\gamma_{1}\omega_{2}}=\frac{1}{\gamma_{1}}\int d^{2}\omega_{1}^{2}\omega_{2}^{2}+\frac{1}{\gamma_{1}}\omega_{2}^{2}+\frac{1}{\gamma_{2}}\omega_{2}^{2$$

مثال: ع= $\{(Y_0+0)^{-1}$ دس لنفرض أن ت=  $Y_0+0 \implies c = Y_0 \implies c = x_0 \implies c = x_0 =$ 

لنعوض الآن في التكامل





وبالتعويض في التكامل

مثال: ع= $\left\{\frac{w-1}{v+1}.$ دس أولاً يكننا كتابة التكامل بالشكل

الآن بملاحظة التكامل ع= إسم دس يمكن فرض ت= س ا+١

دت= ٢س دس وبالتعويض في التكامل

$$3 = \int \frac{\omega_1}{2^n} \cdot \frac{c^2}{2^n} = \frac{1}{7} \int \frac{c^2}{2^n} = \frac{1}{7} \cdot \log_2 2^n = \frac{1}{7} \log_2 (1 + \omega_1^2)$$

أما التكامل ف= إ دس = قوسظاس عندثل فإن

$$\int \frac{\omega^{-1}}{1+r} \cdot c \cdot \omega = \frac{1}{r} \cdot l_{c_{A}} \cdot (\omega^{-1}+1) + \delta c \cdot \omega d \cdot \omega + c.$$

### ٢. الطريقة الثانية - طريقة التجزئة

يستند الأساس النظري لهذه الطريقة على العلاقة د(ل.ع) = دل. ع+ع. دل و مأخذ تكامل الطرفين نجد أن:





إدل.ع)=إدل.ع+ إل.دع

ل.ع=أع.دل+أل.دع ← إعدل=ل.ع-أل.دع

وسنسمي التكامل في الطرف الأيمن مـن العلاقـة الأخـيرة بالتكامـل البـاقي وسنرمز له بــ حاكدع

ملاحظة: تستخدم طريقة التجزئة في الغالب إذا أمكن كتابة التابع في داخل المتكامل بالشكل قَ = ل. دع حيث أحد التابعين وهـوع قـابلاً للمكاملة بسهولة.

مثال: ص= إسه".دس سنختار الآن

ل = س دع= هـ<sup>س</sup>. دس == دل = دس ع= هـ<sup>س</sup>

عندئذ فإن:

 $\int w \, a^{\alpha} \cdot c \, w = w \, a^{\alpha} - \int a^{\alpha} \, c \, w \Rightarrow \neg \int a^{\alpha} \, c \, w = a^{\alpha} + \varphi$ 

مثال: إس. لورس.دس سنختار الآن دل= س. دس ع= لور س

 $\frac{1}{v} = \xi_2$   $\frac{v_0}{v} = 0 \iff 0$ 

 $\int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \int_{0$ 

 $=\frac{1}{\gamma} \cdot l_{c_{A}} \cdot m - \int \frac{m}{\gamma} \cdot c_{M} \Rightarrow \int \int \frac{m}{\gamma} \cdot c_{M} = \frac{3}{\gamma} + c_{M} = \frac{3}{\gamma} \cdot c_{M} = \frac{3}{\gamma} + c_{M} = \frac{3}{\gamma} \cdot c_{$ 





$$\Rightarrow \int_0^\infty \int_$$

مثال: ص= إ قوس ظاس دس إذا اخترنا ل= قوس ظاس دع= دس

دل=<u>۱</u> دس ع= س

 $\Rightarrow \int e_{1} d_{1} \omega = \omega$  .  $e_{2} \omega d_{1} \omega - \int \frac{\omega}{1 + \omega^{2}} \cdot \omega$ 

الأن من أجل التكامل ⇒ ح | من .دس سنختار تغيراً للتحدول ت= ١+س ً ⇒ دت= ٢س. دس

 $\frac{c\tilde{\nu}}{-\infty} = \frac{c\tilde{\nu}}{\gamma_{m}}$ 

 $\gamma = \int \frac{w}{c} \cdot \frac{c^{2}}{c} = \frac{1}{2} \int \frac{c^{2}}{c^{2}} = \frac{1}{2}$ .  $ie_{x} = \frac{1}{2}$ .  $ie_{x} (1 + w^{2}) + e^{-\frac{1}{2}}$ 

 $\Rightarrow \int e^{-\frac{1}{2}} de_{x} (1+m^{2}) + =$ 

مثال: ص= إلور سدس سنجري التجزئة بالشكل:

دل = دس ع= لورس

 $\dot{U} = m \qquad c = \frac{1}{m} c m$ 

 $\Rightarrow$   $\int |\mathbf{b}_{x} \mathbf{w} \cdot \mathbf{c} \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{b}_{x} \mathbf{w} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{b}_{x} \mathbf{w} - \mathbf{w} + \mathbf{e}_{x} \mathbf{w}$ 

مثال: ص= إس جناس دس سنجري التجزئة

ل = س<sup>۲</sup> دع= جتا س . دس





دل = ٢س . دس ع = جا س

سنجري تجزئة مرة أخرى بالشكل: ل = س دع= جا س . دس دل = دس ع = -- جتا س

⇒ ح إسجاس. دس=-س جناس+ إجناس. دس=-س. جناس+جاس+جا الأن سنعود إلى التكامل ص ليصبح:

ص= س<sup>۲</sup> جاس + ۲ س . جتاس – ۲ جاس + جـ

ے اس×س=س×مس= باس+۲س, جناس+۲جاس+ج

مثال: ص= إجا (الورس)دس

من أجل حساب هذا التكامل سنجري أولاً تغييراً للمتحول بالشكل

 $v = \frac{1}{1}$  و  $v = \frac{1}{1}$  و  $v = \frac{1}{1}$  و  $v = \frac{1}{1}$ 

ذلك لأن هـ"= س

الآن لنعوض في التكامل ص فنجد أن ص= إهـ جات.دت

الآن سنجري عملية التجزئة بالشكل

ل = هـ ت دع= جات . دت

ے دل = هـ " ، دت · ع= - جتا ت

YYO



ےص≖∫ه" جات دث = - ه" . جنات+∫ه" . جنات دت

الأن من أجل

ح إ هـ . جات. دت سنجرى من أجله تجزئة بالشكل:

ل = هـ ت دع= جتا ت . دت

دل = هـ ت . دت ع = جات

ح= ( ه ت جات د ت = - ه ت جات + أه ت جات د ت

الآن نعوض ما حصلنا عليه في العلاقة (\*) فنجد أن:

∫ه°. جات. د ت= – ه° جنا + ه°. جات – ∫ه° جات د ت

جات د ک = ه ک جات - ه ک جات - ه ک جات د ک =  $\frac{a^{0}}{7}$  جات د ک =  $\frac{a^{0}$ 

الآن بالعودة إلى المتحول س نجد أن:

$$=\frac{1}{7}$$
.  $[w, \neq 1 (ie_x w)-w \neq i (ie_x w)+ \neq -]$ 

في الواقع بمكن استخدام العلاقة π للحصول على التكامل إه عادت جائدت

وذلك إذا عوضنا م= $\frac{\pi}{7}$  في العلاقة المذكورة وبملاحظة دم= دت نجد أن:

ه، جامدم= [ه، جام-ه، جام]

 $\left\lceil (\gamma / \pi - \vec{\omega})^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \sqrt{\pi}^{-\omega} A - \left(\frac{\pi}{\gamma} - \vec{\omega}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \sqrt{\pi}^{-\omega} A \right\rceil \cdot \frac{1}{\gamma} = \vec{\omega} \cdot \lambda \cdot \left(\frac{\pi}{\gamma} - \vec{\omega}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \sqrt{\pi}^{-\omega} A \right\rceil \leftarrow \left\lceil (\gamma / \pi - \vec{\omega})^{\frac{1}{\gamma}} + \sqrt{\pi}^{-\omega} A - \left(\frac{\pi}{\gamma} - \vec{\omega}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \sqrt{\pi}^{-\omega$ 



جنات دت = 
$$\frac{1}{\gamma} [A^{-\alpha}, A^{-\alpha}]^{1}$$
 جنات +  $A^{-\alpha}, A^{-\alpha}$  جنات +  $A^{-\alpha}, A^{-\alpha}$  جنات +  $A^{-\alpha}, A^{-\alpha}$  جنات +  $A^{-\alpha}, A^{-\alpha}$  جنات +  $A^{-\alpha}, A^{-\alpha}$ 

وعكن كتابة القاصدة العامة للتكاملين ص= [ها حتابس.دس،

ص= [ه<sup>ان</sup> جابس.دس

وذلك بالشكل

سوف نترك إثبات هاتين العلاقتين للقارئ علماً أنها تحل بنفس طريقة التمريز السابق.

ص= إم" جاس دس ، ص= إها جاس دس

# ٣. الطريقة الثالثة: طريقة التكامل بالتدريج:

عندما تكون أمام تابع بسيط ولكنه مرفوع إلى الدرجة (ن) عندتُل فإن طريقة التكامل بالتدريج تكون ناجحة جداً وسوف نلخصها كما يلي:

١. نحاول مبدئياً إجراء تجزئة أو تغيير للمتحول لحفض الدرجة (ن).

 نوجد بعد ذلك دستوراً بين التكامل المعطى ولنسميه صن والتكامل نفسه بعد أن خفضنا درجته بالشكل

$$\Phi_{\omega,\dot{\omega}} = \Psi(\omega) + \geq (\dot{\omega})$$
 .  $\Phi_{\omega,\dot{\omega}} - e$  :  $e \in \dot{\omega}$ 





مثال: ص = إجتابس دس

لحل هذا التكامل سوف نكتب التالى:

ص = إ جنانس دس= إجنان-١س. جناس= إجنان-١س (١-جا١س)دس

= [جنان سوس إجنان سواس دس

= من سعر المنان ١٠٠٠ من ما ١٠٠٠

الآن بالنسبة للتكامل في الطرف الأيمن سنحله وفق تجزئة بالشكل:

[جنان-۲س.جاسدس= [جنان-۲س.جاس.جاس.دل

دل = جتان<sup>۲-۱</sup> س . جا س . دس ع = جا س

ل= <u>جتاس دس</u> ن-1 - ن-1

 $=\frac{-4^{1-\alpha}0,4^{1-\alpha}}{1-i}$ 

الآن سنعود إلى صن فنجد أن:

من =من + بخان سیجاس جاس مین = من من من است. ن - ا

 $\omega = \frac{1}{1-\dot{\upsilon}} + \frac{1}{1-\dot{\upsilon}} = \frac{1}{1-\dot{\upsilon}} + 1$ 

 $v_{-i}u_{-i}\frac{1-\dot{u}}{\dot{u}}+u_{-i}$ 

وهو الدستور التدريجي لحساب التكامل.

مثال: ص = إجاه سدس



إن هذا التمرين يحل بنفس طريقة التمرين السابق وسنترك ذلك للقارئ ويمكن حله أيضاً بالاستفادة من الدستور.

$$\int_{\dot{u}} \frac{1-\dot{u}}{\dot{u}} + \frac{\dot{u}-\dot{u}}{\dot{u}} = \frac{1}{\dot{u}}$$
 چتان می دس

وذلك بتعويض  $w = \frac{\pi}{\gamma}$ ت = دس = -دت.

$$\begin{split} -4c^2 \left(\frac{\pi}{\gamma} - \dot{\omega}\right) \cdot c \dot{\omega} &= \frac{t}{\dot{\omega}} + \frac{t}{\dot{\omega}} + \left(\frac{\pi}{\gamma} - \dot{\omega}\right) + \left(\frac{\pi}{\gamma} - \dot{\omega}\right) + \frac{t}{\dot{\omega}} + \frac{t}{\dot{\omega}} + \frac{t}{\dot{\omega}} - \frac{t}{\dot{\omega}} - \frac{t}{\dot{\omega}} - \frac{t}{\dot{\omega}} + \frac{t}{\dot{\omega}} - \frac{t}{\dot{\omega}} -$$

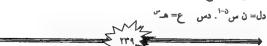
مثال: ن = إظامس عكن حل هذا التكامل بالشكل:

$$\int_{0}^{\infty} = \int_{0}^{\infty} d^{1/2} \omega d$$

الآن من أجل التكامل } للمنا<sup>نة من</sup>.دس نحله بفرض ت= ظاس ليصبح

$$\int \frac{d U^{-\gamma}}{d U^{-\gamma}} \cdot C u = \frac{d U^{-1}}{1-u}$$
 أخيراً تخلص إلى أنْ  $U_0 = \frac{d U^{-1}}{1-u} - U_{0-\gamma}$ 

مثال: صن = إسه . هم دس بحل هذا التكامل بأخذ التجزئة



 $-\infty$   $\int_{0}^{\infty} e^{-u} e^{-u} = 0$   $\int_{0}^{\infty} e^{-u} e^{-u} = 0$ 

مثال: ص = إس، اورس دس حيث م ∈ ن

ننجري النجزئة دل = سأ . دس ع= لوس ع النجري النجزئة دل = سأ . دس دع=ن. لوس-1 دع=ن. لوس-1 الم

 $\Rightarrow \omega_{c} = \frac{u_{v}^{**}}{a+1}, \quad e^{i\omega_{0}} - \int \frac{\dot{U}}{a+1}, u^{q+1}, \frac{1}{u}, \quad e^{i\omega_{-1}}u, e_{u}u$   $= \frac{u^{**}}{b^{*}} \frac{e^{i\omega_{0}}}{b^{*}} \frac{\dot{U}}{b^{*}} \frac{\dot{U}}{b^$ 

مثال: من =  $\frac{c_0}{(4\pi \sqrt{1+4})}$  یکن حل هذا التکامل إذا کتبنا:

 $\omega_{\mathbf{v}_{\mathbf{v}}} = \int_{\mathbf{v}_{\mathbf{v}}} \frac{1}{1+|\mathbf{v}_{\mathbf{v}}|} \left[ \frac{1}{1+|\mathbf{v}_{\mathbf{v}}|} \left( \frac{1}{1+|\mathbf{v}_{\mathbf{v}}|} \right)^{1-|\mathbf{v}_{\mathbf{v}}|} \left( \frac{1}{1+|\mathbf{v}_{\mathbf{v}|}|} \right)^{1-|\mathbf{v}_{\mathbf{v}}|} \left( \frac{1}{1+|\mathbf{v}_{\mathbf{v}}|} \right)^{1-|\mathbf{v}_{\mathbf{v}}|} \left( \frac{1}{1+|\mathbf{v}_{\mathbf{v}|}|} \right)^{1-|\mathbf{v}_{\mathbf{v}}|} \left( \frac{1}{1+|\mathbf{v}_{\mathbf{v}}|} \right)^{1-|\mathbf{v}_{\mathbf{v}}|} \left( \frac{1}{1+|\mathbf{v}_{\mathbf{v}}|} \right)^{$ 

الأن بملاحظة التكامل [ (س<sup>٢</sup> الم<sup>٢</sup>) الله على حله بفرض التجزئة:

 $cb = \begin{cases} \frac{cw}{(w^{T} + f^{T})^{cott}} \cdot cw & 3 = w \\ 3 = \frac{1}{7ic} \frac{1}{(w^{T} + f^{T})^{cott}} \cdot cw & -\frac{1}{7ic} \frac{1}{(w^{T} + f^{T})^{cot}} \cdot cw = \frac{-w}{7i(w^{T} + f^{T})^{c}} + \frac{1}{7ic} \cdot \left[ \frac{cw}{(w^{T} + f^{T})^{cot}} \cdot cw = \frac{-w}{7i(w^{T} + f^{T})^{c}} + \frac{1}{7ic} \cdot \frac{1}{7i$ 



$$_{i+\omega} \cup _{i} , \tau |_{i} = \frac{1+\omega}{1+\omega} (\tau |_{i} + \tau_{(i,j)}) \Big[, \tau |_{i} = \cup_{i} , \frac{1+\omega}{1+\omega} (\tau |_{i} + \tau_{(i,j)}) \Big]$$

الآن بالعودة إلى العلاقة (\*) نجد أن:

$$\Delta u_{ij} = \frac{1}{\gamma(j_{(N)} + j_{(N)})^{2}} + \frac{1}{\gamma(j_{(N)} + j_{(N)})^{2}} = 0$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{1+$$

مثال: ص = الوس دس بإجراء التجزئة ل= لوس دع= دس

دل=ن. لوس الم الم ع = س

 $a_{ij} = \int_{\mathbb{R}^{n}} e^{i\omega} c \omega = \omega \int_{\mathbb{R}^{n}} e^{i\omega} \int_{\mathbb{R}$ 

= w le va - ju le v-1 m. cm

 $\Rightarrow$   $a_{ij} = 0$ ,  $b_{ij}^{0} = 0$ ,  $a_{ij}^{0} = 0$ 

مثال: ص = إجان قطع)س.دس يمكن كتابة

ساس ( قطع)سدس- إجا <sup>د-٧</sup> ( قطع)سدس

= إجا <sup>١-٥</sup> ( قطع)س. ( جنا ٢ ( قطع)س - ١). دس= إجا <sup>١-٥</sup> ( قطع)س. ا

الآن من أجل التكامل أجاد" (قطع)س. جنا (قطع) جنا (قطع)دس





عِمل بهاجراء التجزئة دل = جا<sup>د-۲</sup> (قطع) س. جنا (قطع) س ع = جنا (قطم) س

$$= \frac{1}{1-i} \frac{1}{1-i}$$
 ، دع = جا(قطع)س. دس

اجا ب- القطيم س جتا القطيم س دس = جا م- القطيم س جتا القطيم س جتا القطيم س دس = جا م- القطيم س دس القطيم س دس القطيم س دستان القطيم س دستان القطيم س القطيم س دستان القطيم س القطيم س

رد الله الملاقة + لنجد أن مود إلى الملاقة + لنجد أن مود إلى الملاقة + لنجد أن الملاقة + لنجد أن

من = الإصلاح نجد المام من المام الم

أن

#### مناقشة عامة:

إن الطرق الثلاث المذكورة سابقاً هي الطرق التي يمكن حمل بهما أي تكامل تقريباً ولكن يجب أن نعرف كيف ومتى تستخدم هذه الطرق كي نستطيع حمل التكامل وهذا الأمر بعد التوفيق من الله تعالى خبرة وممارسة كبيرة وفيما بعمد صنقدم كيفية مكاملة أشكال عامة من التوزيع.

# أولاً: تكامل التوابع الكسرية:

يعرف التابع الكسري كما ورد معنا بالشكل  $o(w) = \frac{U_0(w)}{v_0(w)}$  حيث  $U_0(w)$  حدودية من الدرجة (م) ونكتبها بالشكل:





$$(G_{i}^{0}) = (G_{i}^{0})^{0} + (G_{i}^{0})^{0} + \dots + (G_{i}^{0})^{0} + \dots + (G_{i}^{0})^{0} + \dots + (G_{i}^{0})^{0} + \dots + (G_{i}^{0})^{0}$$

b)  $(G_{i}^{0}) = (G_{i}^{0})^{0} + (G_{i}^{0})^{0} + \dots + (G_{i}^{0})^{0}$ 

b)  $(G_{i}^{0}) = (G_{i}^{0})^{0} + (G_{i}^{0})^{0} + \dots + (G_{i}^{0})^{0}$ 

c)  $(G_{i}^{0}) = (G_{i}^{0})^{0} + (G_{i}^{0})^{0} + \dots + (G_{i}^{0})^{0}$ 

c)  $(G_{i}^{0}) = (G_{i}^{0})^{0} + (G_{i}^{0})^{0} + \dots + (G_{i}^{0})^{0}$ 

c)  $(G_{i}^{0}) = (G_{i}^{0})^{0} + (G_{i}^{0})^{0} + (G_{i}^{0})^{0} + (G_{i}^{0})^{0}$ 

c)  $(G_{i}^{0}) = (G_{i}^{0})^{0} + (G_{i}^{0})^{0} +$ 

إذا كان لدينا ره(س)، يم (س) حدوديتان عند ثد تعرف عملية القسمة بالشكل حيث ن>م

وهكذا حتى نصل إلى (حدودية باقي القسمة) والتي درجتها أقل من درجة ي,(س) وهي حدودية المقسوم عليه.

مثال: اقسم الحدودية رو(س)=  $m^0 + Y_0 m^0 + m^0 + 1$  على الحدودية  $y_y(m) = m^0 + Y_0$ 

# : الحل:

بعد إجراء عملية القسمة نكتب:

$$\frac{1+\omega^{2}Y}{\omega^{2}Y}+1 \\ 1-\omega^{2}Y+\frac{1}{2}\omega^{2}Y-\frac{1}{2}\omega=\frac{1+\frac{1}{2}\omega^{2}Y+\frac{1}{2}\omega^{2}Y+\frac{1}{2}\omega^{2}Y}{\omega^{2}Y+\frac{1}{2}\omega^{2}Y}$$





وسنسمي الحدودية الناتجة عن القسمة "خارج القسمة وسنرمز لها بـ ك(س) ونسمي باقي القسمة بـ ح(س) وعندها سنكتب:

 $\frac{(\omega)^{2}}{(\omega)} = (\omega)^{+} + (\omega)^{-} = (\omega)^{-}$ 

وتكون درجة ك(س) أصغر من أو تساوي م—ن ودرجة ح(س) أصغر من م. مبرهنة: إذا كان س. جلداً للمعادلة  $\mathbf{y}_{1}(\mathbf{m}) = \mathbf{v}$  فإن الحدودية  $\mathbf{y}_{1}(\mathbf{m})$  ستقبل القسمة دون باق على  $\mathbf{m}_{1} = \mathbf{v}$ .

البرهان: بفرض  $y_1(m)$  تقبل القسمة  $m-m_Y$  مع باقي معلوم نفرضه -(m) عندائر فإن -(m) متساوي عدداً ثابتاً ذلك لأن درجة -(m) مستكون أصغر من درجة -(m) وبالتبالي -(m) ألأن لنكتب الشكل:  $\frac{y_1}{m_Y}(m) = 0$  -(m)

+ (س) - رس-س) = (س) + (س)





هما أن يم(س.)= • ويتعويض س. مكان س في العلاقـة الأخـيرة نحـصل على (+∙• • → (=• وهو المطلوب.

مبرهنة هامة: إن كل حدودية ي، (س) ذات أمثال حقيقية عكن تحليلها إلى جداء حدوديات من الدرجة الأولى أو الثانية على الأكثر.

ملاحظة: إن برهان هذه المرهنة ليس في اختصاص هذا الكتاب.

الآن من أجل تكامل التوابع الكسرية لدينا حالتان هامتان:

١- إذا كانت درجة الحدودية في المقام أصغر من درجة الحدودية في البسط عندئد يجب تقسيم الحدودية رن(س) على الحدودية يه(س) لنحصل على الشكار:

$$\frac{C_{ij}(\omega)}{2^{ij}} = \mathbb{E}(\omega) + \frac{C_{ij}(\omega)}{2^{ij}} : U < q$$

eathal parts 
$$\int \frac{C_{ij}(nj)}{2^{ij}} = c_{ij} = \frac{|b_{ij}(nj)|}{2^{ij}} + \int \frac{J_{ij}(nj)}{2^{ij}} c_{ij}$$

حيث ك(س) حدودية وتكاملها أمر بسيط.

أما من أجل التكامل \ ع<sub>ر (ص)</sub>دس: ل< م فإننا نكون بـذلك أمـام الحالـة الثانـة.

٢- إذا كانت درجة حدودية المقام أكبر من درجة حدودية البسط عندئذ لابـد
 من تفريق الكسر.

#### تفريق الكسور:

من أجل تفريق الكسر سوف تحلل المقـام يم(س) إلى عوامــل مــن الدرجــة





الأولى والثانية على الأكثر علماً أن ذلك عمكن حسب المبرهنة السابقة وسنميز أربع حالات مهمة:

 الحالة الأولى: إذا استطعنا تحليل يهمس إلى عوامل من الدرجة الأولى وغير مكررة عندثاني نستطيع كتابة الكسر بالشكل:

حيث أر، أبر، ... ، أم أمثال غير معينة.

نستطيع تعيين هذه الأمثال ببساطة إذا عوضنا م قيمة اختيارية في المطابقة \* أعلاه لنحصل بذلك على م معادلة بـ م مجهول وبحلها يتحقق المطلوب.

مثال: من أجل 
$$\frac{1+^{v}}{(v-1)(v-1)(v-1)} = \frac{1+^{v}}{(v-1)(v-1)(v-1)(v-1)(v-1)}$$

ويمكن تحليلها بالشكل:

$$\frac{1}{Y-u} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}$$

الأن سنعوض س=٢ في المطابقة لنحصل على:

$$Y/I_I + \Lambda I_Y + 3YI_Y + \Gamma I_3 = -0$$

$$011_1 + 111_1 + 111_2 - 111_3 = -11$$



وهي أربع معادلات وبحلها المشترك نحصل على:

$$f_{\ell} = \ell \setminus Y$$
 ,  $f_{\gamma} = -\ell$  ,  $f_{\gamma} = \ell \setminus Y$  ,  $f_{\gamma} = 0 \setminus Y$ 

وبالتالي يصبح لدينا:

$$\frac{\circ}{(Y-\omega)^{2}} + \frac{1}{(1+\omega)^{2}} + \frac{1}{1-\omega} + \frac{1}{(\omega-1)^{2}} = \frac{1+^{7}\omega}{1+(\omega-1)^{2}} + \frac{1}{(1+\omega)^{2}} + \frac{1}{(1+$$

ولكن كما رأينا فإن طريقة التعويض تكون في غالب الأحيان طويلـة لـذلك سوف نورد طريقة الضرب بمعامل وذلك بالشكل التالي:

إذا ضربنا طرفي العلاقة (\*) بالعامل س سنحصل على:

$$\left[\frac{1}{Y-U^{\alpha}}+\frac{1}{Y+U^{\alpha}}+\frac{1}{Y-U^{\alpha}}\right]\cdot U^{\alpha}+\frac{1}{y}=\frac{1+^{\gamma}U^{\alpha}}{(Y-U^{\alpha})(y-U^{\alpha})(y-U^{\alpha})}$$

ثم نعوض س= ١ لنحصل على أ٢= -١

وهكذا وبنفس الطريقة نحصل على أي، أم.

مثال: فرق الكسر  $\frac{n+n}{m^2-m}$ 

# الحل:

بملاحظة أن س م -- س = س (س+١) (س-١) عندثلْ فإن:

$$\frac{\tau^{\frac{1}{2}} + \tau^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{(1-\omega)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1+\omega}{(1-\omega)(1+\omega)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1+\omega}{1+\omega}$$

الآن لإيجاد كلاً من أر، أو نجري التالي:





أولاً نضرب بـ س كلا الطوفين لنحصل على:  $\frac{1}{w-1} + w = \frac{1}{w-1}$ 

ونعوض س= ٠ في العلاقة السابقة فنحصل على أ١- =١٠

وبنفس العملية من أجل أر فنحصل على أرء ١ وبالتالي:

 $\frac{1}{1-w} + \frac{1-}{w} = \frac{1+w}{w-r}$ 

 الحالة الثانية: إذا كان يهراس) يمكن أن يكتب كعوامل من الدرجة الأولى ومكررة وذلك بالشكل:

ي، (س + برا) = (۱ ا + برا) د ا (۱ ب + برا) د ا د ا ا د ا د برا) د ا د ا د برا) د ا

وحيث ن١ + ن٢ + ٠٠٠ م عندئذ يفرق الكسر بالشكل:

 $\frac{C_{ij}(u_{i})}{2^{ij}_{ij}(u_{i})} = \frac{C_{ij}(u_{i})}{((u_{i}u_{i}+u_{i})^{0}i_{i}....((u_{i}u_{i}+u_{i})^{0}i_{i})}} = \frac{1}{((u_{i}u_{i}+u_{i})^{0}i_{i}....((u_{i}u_{i}+u_{i})^{0}i_{i})}} + .... + \frac{1}{(u_{i}u_{i}+u_{i})^{0}i_{i}} + \frac{1}{(u_{i}u_{i}+$ 

مثال: فوق الكسر التالي:  $\frac{m^{-\gamma+1}}{m(m^{\gamma}-1)^{\gamma}}$ يملاحظة أن  $m(m^{\gamma}-1)^{\gamma}=m(m-1)^{\gamma}$  (س+۱)

الآن نلاحظ أن:

أما لإيجاد الأمثال أ،، ب،، ب،، ب، ج،، ج،، فإنه من أجل أعلى درجة للعامل يمكن تطبيق أسلوب الضرب بالعامل وذلك مثل أ،، ب، ج.. أصا من





أجل الباقي فلابد من توليد عدداً من المعادلات مساو للمجاهيـل وهـي طريقـة التعويض من أجل المثل نلاحظ أنه بالضرب بـ س ووضعه مساوياً للـصفر نجـد أن أ.= ١.

وبالضرب بـ (س-١) ووضع س= ١ نجد أن ب₁= ١/١.

وبالضرب بـ (س+١) ووضع س= ١٠ نجد أن جم= ١٠/٢.

أما من أجل جه، ب، فإذا عوضنا س= ٢ في العلاقة نحصل على ٩٠٠ + ٣جه= ٧/٣

وبحل المعادلتين الأخيرتين نحصل على:

 $-\gamma = \frac{13}{70}$ ,  $+\gamma = \frac{-737}{130}$  ونكون بذلك قد فرّقنا الكسر.

۳. الحالة الثالثة: إذا أمكن كتابة  $ي_{\gamma}(m)$  على شكل عوامل من الدرجة الثانية وليست مكررة مثل  $ي_{\gamma}(m) = (\frac{1}{2}m^{3} + \frac{1}{2}m^{3} + \frac{1}{2}m^{3} + \frac{1}{2}m^{3})$  ....  $(\frac{1}{4}6m^{3} + \frac{1}{2}m^{3} + \frac{1}{2}m^{3} + \frac{1}{2}m^{3})$ 

واقع الأمر في هذه الحالة سيكون للمعادلة م يم(س)= • جذراً تحليلياً أو عقدياً مختلفاً نستطيم تفريق هذه الحالة بالشكل:

$$\frac{C_{0}\left( u_{1}\right) }{\left( \left( u_{1}\right) + u_{1}, u_{2} + + \dots + \frac{1}{n}, u_{1} + u_{2}\right) } = \frac{1}{\left( \left( u_{1}\right) + u_{1}, u_{2} + \dots + \frac{1}{n}, u_{1}\right) + u_{2}} + \dots + \frac{1}{n} \frac{1}{n} \frac{u_{1} + u_{2}}{1 + u_{2}} \frac{u_{2} + u_{2}}{1 + u_{2}} \frac{u_{2}}{1 + u_{2}} \frac{u_{2$$

ونعين الأمثال بي، أي الجهولة بطريقة التعويض أو المطابقة.





مثال: فرق الكسر  $\frac{w^{7}}{(w^{7}+1)(w^{7}+1)}$ 

:,141

$$\frac{v_{1}+v_{2}+v_{3}}{\xi+v_{3}}+\frac{v_{1}+v_{2}+v_{3}+v_{3}}{1+v_{3}}=\frac{v_{3}}{(\xi+v_{3}+v_{3$$

إذا استخدمنا أسلوب المطابقة فإننا سنحصل بعد توحيد المقــام في الطــرف الأيمن والإصلاح على

$$\bullet = {}_{1} \underbrace{-}_{1} \underbrace{+}_{1} \underbrace{+}_{2} \underbrace{+}_{2} \underbrace{+}_{3} \underbrace{+}_{4} \underbrace{+}_{4} \underbrace{+}_{5} \underbrace{+}_{5}$$

وبالتالي يصبح لدينا 
$$\frac{w^{\gamma}}{(w^{\gamma}+1)(w^{\gamma}+1)} = \frac{-w}{\gamma(w^{\gamma}-1)} + \frac{3w}{\gamma(w^{\gamma}-1)}$$

 الحالة الرابعة: أن يكتب ي (س) على شكل جداء لحدوديات من الدرجة الثانية ولكنها مكررة. وذلك بالشكل:

 $\frac{1}{2} \frac{(\omega)}{(2\omega)^2} \frac{(2\omega)^2}{(2\omega)^2} \frac{(2\omega$ 

مثال: فرق الكسر 
$$\frac{v^{-1}}{(w^{1}+1)(w^{2}+1)^{2}}$$
 هكن كتابة هذا النوع بالشكل:



وبعدها نعين الأمثال إما بطريقة المطابقة أو التعويض بقيم معينة لـ س.

إلى حد الآن كنّا قد تعلمنا كيف نفرق أي كسر. أما طريقة المكاملة فهمي على النحو التالي:

١ – الحالة الأولى: في هذه الحالة كان لدينا:

$$\frac{1}{\psi_{\nu}\left(\omega\right)} = \frac{1}{\psi_{\nu} + \psi_{\nu}} + \frac{1}{\psi_{\nu} + \psi_{\nu}} + \dots + \frac{1}{\psi_{\nu} + \psi_{\nu}} = \int \frac{\psi_{\nu}\left(\omega\right)}{\psi_{\nu}\left(\omega\right)} \cdot \omega = \int \frac{1}{\psi_{\nu} + \psi_{\nu}} \cdot \omega + \dots + \int \frac{1}{\psi_{\nu} + \psi_{\nu}} \cdot \omega + \dots + \frac{1}{\psi_{\nu} + \psi_{\nu}} \cdot \omega = 0$$

الآن بالنظر إلى إحدى التكاملات  $1 \frac{1}{f_0 \, \omega + v_v}$  نجمد أنه إذا فرضنا ت=  $f_0 \, \omega + v_v$   $f_0 \, \omega + v_v$   $f_0 \, \omega + v_v$ 

$$\int_{\frac{1}{\eta_0}} \frac{1}{\eta_0 + \mu_0} \cdot \epsilon \omega = I_0 \int_{\frac{1}{\eta_0}} \frac{\epsilon z}{\eta_0} = \frac{1}{\eta_0} \cdot k_{\perp} z = \frac{1}{\eta_0} \cdot k_{\perp} \left( \eta_0 \omega + \mu_0 \right)$$

$$\Longrightarrow J_{\frac{\mathcal{C}_{\mathcal{O}}}{2}\left(\frac{|\mathcal{C}_{\mathcal{O}}|}{2}, c_{1}\omega\right)} \cdot c_{1}\omega = \frac{1}{f_{1}}, \ \ \ell_{1}\left(f_{1}\omega + \psi_{1}\right) + ... + \frac{1}{f_{n}}, \ \ \ell_{2}\left(f_{n}\omega + \psi_{n}\right)$$

٢- الحالة الثانية

$$\frac{c_{c}(\omega)}{\varphi_{s}(\omega)}.c\omega = \frac{1}{(1,\omega+\nu_{s})} + \dots + \frac{1}{(1,\omega+\nu_{s})} + \dots$$

$$...+\omega^{2}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}+\omega^{2},\frac{1}{2}\right)}\Big[+...+\omega^{2}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\omega\left(\frac{1}{2}+\omega^{2},\frac{1}{2}\right)}\Big]=\omega^{2}\cdot\frac{\left(\omega^{2}\right)}{\left(\omega^{2}\right)}\cdot\frac{\omega^{2}}{\omega^{2}}\Big[$$

الآن بملاحظة إحدى التكاملات في الطرف الأيمن نجد أن:





$$\left\{\frac{1}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N}} L_{+} \omega_{-}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot c \omega = \int_{\mathbb{R}^{N}} \frac{c \omega}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N}} L_{+} \omega_{-} \omega_{-}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot c \omega = \int_{\mathbb{R}^{N}} \frac{c \omega}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N}} L_{+} \omega_{-} \omega_{-}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot c \omega = \int_{\mathbb{R}^{N}} \frac{c \omega}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N}} L_{+} \omega_{-} \omega_{-}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot c \omega = \int_{\mathbb{R}^{N}} \frac{c \omega}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N}} L_{+} \omega_{-} \omega_{-}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot c \omega = \int_{\mathbb{R}^{N}} \frac{c \omega}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N}} L_{+} \omega_{-} \omega_{-}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot c \omega = \int_{\mathbb{R}^{N}} \frac{c \omega}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N}} L_{+} \omega_{-} \omega_{-}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot c \omega = \int_{\mathbb{R}^{N}} \frac{c \omega}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N}} L_{+} \omega_{-} \omega_{-}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot c \omega = \int_{\mathbb{R}^{N}} \frac{c \omega}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N}} L_{+} \omega_{-} \omega_{-}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot c \omega = \int_{\mathbb{R}^{N}} \frac{c \omega}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N}} L_{+} \omega_{-} \omega_{-}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot c \omega = \int_{\mathbb{R}^{N}} \frac{c \omega}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N}} L_{+} \omega_{-} \omega_{-}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot c \omega = \int_{\mathbb{R}^{N}} \frac{c \omega}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N}} L_{+} \omega_{-} \omega_{-}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot c \omega = \int_{\mathbb{R}^{N}} \frac{c \omega}{\left(\int_{\mathbb{R}^{N}} L_{+} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-} \omega_{-}} \omega_{-} \omega_{-}$$

الآن بفرض  $\{ (m + p) = r \implies \{ (m + p) = r \implies r = r \}$ 

$$\frac{1}{\left(\int_{\{u+v_{+}\}}^{U} cu=1, \int_{\{u-v_{+}\}}^{U} cu=\frac{1}{\int_{\{u-v_{+}\}}^{U} cu}, cu=\frac{1}{\int_{\{u-v_{+}\}}^{U} cu}}\right)}$$
 وهكذا يمكن مكاملة جميع التكاملات في الطرف الأيمن.

٣- الحالة الثالثة: تكون أمام التكاملات من الشكل:

$$\int_{\mathbb{R}^{n}} \frac{(\omega)}{(\omega)} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n}} \frac{1}{(\omega)^{2} + (\omega)^{2} + (\omega)^{2}} d\omega + (\omega)^{2} + (\omega$$

علاحظة التكامل  $\int_{\frac{1}{2}} \frac{1, w + y}{1 + y} \frac{1}{w + x}$  فإننا نلاحظ أن  $\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + x < 0$ 

وذلك لكون الحدودية غير قابلة للتحليل إلى أبسط من ذلك. الآن

# لنكتب:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac$$

$$\left[\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}},\frac{1}{1$$

الآن لنسمي التكامل 
$$\int \frac{Y_{0}+\mu_{1}/\eta_{1}}{m_{1}+\mu_{1}/\eta_{1}}$$
.دس

الآن بتغيير المتحول بالشكل 
$$w' + \frac{\varphi}{1} + \dots + \frac{\varphi}{1}$$



$$\omega = \int \frac{c \tau}{\tau} = \log_{\alpha} \tau = \log_{\alpha} \left( \omega^{\gamma} + \frac{\varphi_{1}}{\eta_{1}} \omega + \frac{\varphi_{2}}{\eta_{1}} \right)$$

أما من أجـل التكامـل ص= $\int \frac{c.v}{v^*+\frac{c.v}{t}}$  سنجري أولاً في المقـام  $\frac{c.v}{v^*+\frac{c.v}{t}}$ 

#### إكمال للربع ليصبح لدينا الشكل:

$$w'' + \frac{\psi_1}{f_1} w + \frac{\varphi_1}{f_2} = w'' + \frac{\psi_1}{f_1} w + \left(\frac{\psi_1}{\gamma f_1}\right)'' - \left(\frac{\psi_1}{\gamma f_1}\right)'' + \frac{\varphi_1}{f_1} = \left(w + \frac{\psi_1}{\gamma f_1}\right)'' + f'' \dot{c}$$

$$\text{i.b. } \dot{V} \text{ i. l. l. i.e. } f' = \frac{\varphi_1}{f_1} - \left(\frac{\psi_1}{\gamma f_1}\right)'' > \cdot e \dot{c} \text{ i.b. } \dot{V} \text{ i. s. } f_1 \in \gamma_1 = \gamma_1 > \cdot$$

$$\frac{\omega}{1+\sqrt{\frac{1}{1+1}}}$$
عندال یسبح شکل التکامل کما یلي:  $\omega=\int_{\mathbb{T}^{n}}\frac{\omega}{1+1}$ 

# هنا سنجري تغييراً للمتحول:

$$C=m+\frac{\varphi_1}{\gamma_1}\Rightarrow CC=Cm$$

$$\omega = \int \frac{c \cdot v}{v^2 + \eta^2} = \frac{1}{\eta} \cdot \text{decodd} \frac{v}{\eta} \Rightarrow \int \frac{c \cdot v}{\left( v + \frac{v}{1 + \eta} \right)^2 + \eta^2} = \frac{1}{\eta} \cdot \text{decodd} \left( \frac{v + v \cdot \sqrt{1 / \eta}}{\eta} \right)$$

# أخيراً نخلص إلى أن:

$$\int \frac{I_{1}w_{1}+v_{1}}{I_{1}w_{1}+v_{1}} \cdot cw = \frac{I_{1}}{Y!} \cdot l_{ex} \left(w^{7} + \frac{v_{1}}{I_{1}}w_{1} + \frac{v_{1}}{I_{1}}w_{1} + \frac{v_{1}}{I_{1}}\right) + \frac{V_{1}}{I_{1}} \cdot \frac{V_{1}}$$





3. الحالمة الرابعية: تحيل التكاملات  $\int_{(1, \omega' + \mu, \omega + e_+)^L}^{1,\omega + \mu, \omega} e^{-L\omega}$ . دس بطرق تدريجية كما مر معنا في مثال سابق.

### تمارين محلولة على التكاملات الكسرية:

احسب كلاً من التكاملات الكسرية التالية:

$$1 - \int \frac{Y + u + v}{(u - v)(v + v)}$$
. د  $u$  أو لأ سنفرق الكسر:

وبإجراء عملية الضرب بالعامل نحصل على أ= ١، ب=١.

$$\left\{\frac{\gamma\omega-\gamma}{(\omega+\omega)(\omega+\sigma)}\cdot C_1\omega - \frac{1}{2}\sum_{n}\frac{1}{2}\sum_{$$

$$Y = \int \frac{\omega \cdot c \cdot w}{(w - Y + W + Y)} Libinon 1 - Y$$

$$\frac{\omega}{(\omega-1)^{\gamma}(\omega^{\gamma}+\gamma\omega+\gamma)} = \frac{1}{(\omega-1)^{\gamma}} + \frac{\omega}{(\omega-1)} + \frac{-\omega}{(\omega-1)^{\gamma}(1-\omega)} + \frac{-\omega}{(\omega-1)^{\gamma}(1-\omega)} + \frac{1}{(\omega-1)^{\gamma}(1-\omega)} = \frac{1}{(\omega-1)^{\gamma}(1-\omega)} + \frac{$$

الآن نجري التكامل

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 +$$





الآن من أجل التكامل الأخير نجد أن:

$$= \frac{-1}{2} \left[ \frac{\gamma_{0,0} + \gamma}{v_{0} + \gamma_{0,0} + \gamma_{0,0} + \gamma_{0,0}} \frac{\epsilon_{0,0}}{v_{0} + \gamma_{0,0} + \gamma_{0,0}} \right] \frac{-1}{v_{0}} \left[ \frac{\epsilon_{0,0}}{v_{0}} \left( v_{0} + \gamma_{0,0} + \gamma \right) - \gamma_{1} \Gamma \left( \frac{\epsilon_{0,0}}{v_{0} + \gamma_{0,0} + \gamma_{0,0}} \right) \right] \frac{1}{v_{0}}$$

$$= \frac{\epsilon_{0,0}}{v_{0}} \frac{\epsilon_{0,0}}{v_{0}} \frac{\epsilon_{0,0}}{v_{0}} \frac{1}{v_{0}} \frac{\epsilon_{0,0}}{v_{0}} \frac{1}{v_{0}} \frac{\epsilon_{0,0}}{v_{0}} \frac{1}{v_{0}} \frac{\epsilon_{0,0}}{v_{0}} \frac{1}{v_{0}} \frac{\epsilon_{0,0}}{v_{0}} \frac{1}{v_{0}} \frac{1}{v_{0$$

$$\frac{c_{*0}}{1+\frac{v_{*1}}{1+v_{*1}}} = \frac{c_{*0}}{1(v_{*1}+v_{*1})!} = \frac{c_{*0}}{1+\frac{v_{*1}}{1+v_{*1}}}$$

$$b=\int_{\frac{1}{1-1}}^{\frac{1}{1-1}}=$$
قوس ظا $(-1)+$ 

الآن نعود إلى التكامل 
$$\left\{\frac{\omega^{\gamma}+\gamma_{\omega}+1}{(\omega^{\gamma}+\gamma_{\omega}+\gamma)(\omega-1)^{\gamma}}\right\}$$
 لنجد أنه =

$$\frac{-1}{o} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} \cdot \frac{1$$

$$- \int \frac{w}{(w^{\top} + 1)(w^{\top} + 1)}$$
. دس إن هذا الكسر قد فرقناه في المثال:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}$$

$$\frac{-1}{\gamma},\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\gamma},\frac{\gamma\omega_{1}}{\eta^{-\gamma}+1},\epsilon\omega_{1}+\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\gamma},\int_{\frac{1}{2}}\frac{\gamma\omega_{1}}{\omega^{-\gamma}+2},\epsilon\omega_{2}-\frac{-1}{\gamma},\ \ell\varrho_{\infty}\left(\omega^{\gamma}+1\right)+\frac{\gamma}{\gamma},\ \ell\varrho_{\infty}\left(\omega^{\gamma}+2\right)+\epsilon-\frac{1}{\gamma}$$





 $\frac{\omega+1}{\gamma_{W}}$ دس نجد أن هذا التكامل من الحالة الثالثة لأن  $\gamma_{W}$ 

$$\Delta = 1 - 3 \times 7 \times 7 = \Delta$$

$$\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}2}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}2}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}2}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}2}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}2}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}2}}$$

$$=\frac{1}{3}\left( \log_{\lambda} \left( \log^{\gamma} \frac{1}{\gamma} \log + \frac{1}{\gamma} \right) + \frac{\gamma}{\gamma} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\delta_{2} \log^{2} \beta}{\gamma + \gamma} \cdot \frac{\delta_{2} \log^{2} \beta}{\gamma + \gamma} \right) - \frac{1}{3} \log^{2} \beta} \right)$$

ملاحظة هامة: إن ما أوردناه سابقاً هو الطريقة العامة لحل أي تكامل كسري وقد تبين معنا أن أي تكامل كسري هو تكامل قابل للمكاملة وإيجاد التابع الأصلي.

## ثانياً: تكاملات التوابع الصّماء:

تحوي هذه التوابع جـذوراً مـن درجـات مختلفـة لتوابـع كـسرية وصـحيحة وتنقسم إلى الأنواع التالية:

التكاملات الحاوية على جنور مختلفة لتابع كسري خطي:
 ولها قسمان أساسيان:

أ-التكاملات من الشكل ص=[ع(س،س در، س در) .... وس

حيث رر، رم، ... ، رم أعداداً كسرية بالشكل:





 $-1 - (1^{-1} - 1^{-1}) - 1^{-1} - 1^{-1}$ .  $-1^{-1}$ .  $-1^{-1}$ .  $-1^{-1}$ .  $-1^{-1}$ .  $-1^{-1}$ .  $-1^{-1}$ .  $-1^{-1}$ .  $-1^{-1}$ .  $-1^{-1}$ .  $-1^{-1}$ .  $-1^{-1}$ .  $-1^{-1}$ .  $-1^{-1}$ .  $-1^{-1}$ .  $-1^{-1}$ .  $-1^{-1}$ .  $-1^{-1}$ .  $-1^{-1}$ .  $-1^{-1}$ .

حيث ل، ... ، لم أعداد طبيعية وبالتالي حصلنا بذلك على تكامل لتابع صحيح أو كسري.

مثال: ص=  $\int \frac{2n u}{n(1+\gamma \sqrt{1+\gamma^2} \sqrt{1+\gamma^2})}$  علاحظة أنه لدينا  $v_1 = \frac{1}{\gamma}$  ،  $v_2 = \frac{1}{\gamma}$  ،  $v_3 = \frac{1}{\gamma}$ 

س= ت¹ ⇒ دس= ۱ ت¹ . دت

$$\Box 3 - \frac{\frac{1}{\gamma} + \Box 4}{1 - \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}} + \frac{\Box 4}{1 - \frac{1}{\gamma}} - \frac{\Box 4}{1 + \Box} + \frac{\Box 4}{1 - \frac{1}{\gamma}} - \frac{\Box 5}{1 - \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}} - \frac{\Box 7}{1 - \frac{$$

=٦. او<sub>د</sub> ت-<del>"</del> او<sub>د</sub> (ت+١)+ [...

بالنسبة للتكامل الأخير نجد أن:



$$2 \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac$$

$$\left[\frac{-\rho}{2},\int\frac{\gamma^2-\frac{1}{\gamma}}{\gamma^2-\frac{1}{\gamma}}+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^2-\frac{1}{\gamma}}+\frac{1}{\gamma^2-\frac{1}{$$

#### ب-التكاملات من الشكل:

$$\omega \cdot \sqrt{\frac{(\mu + \mu)}{(\mu + \mu + \mu)}} \cdot \dots \cdot \sqrt{\frac{(\mu + \mu)}{(\mu + \mu)}}$$

سنفرض الآن تغيراً للمتحول تعلم المنطق المنطقة المضاعف المشترك الأصغر المناصف المنطقة المنطقة والمنطقة والمنطقة المنطقة والمنطقة والمنطقة

الآن نحصل على:

$$\psi = \psi + \psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 + \psi_5 + \psi_6 + \psi_6$$

حيث ψ(ت) تابعاً كسرياً.

الآن بتعويض قيمة دس، س في التكامل نجد أن:





$$\frac{1-\omega}{1-\omega}V-1$$
 في الواقع يمكن كتابة التكامل بالشكل:  $\omega=\int_{1-\omega}^{1-\omega}V+1$  دس

الآن سوف ندخل المتحول ت إلى التكامل:

وهو تكامل كسري يمكن حله وذلك بتفريق الكسر أولاً فيصبح لدينا:

$$\frac{c}{c} = \frac{1}{c} \left\{ \frac{c}{c} + \frac{c$$

Y/1 = Y، بY=1 ، بY=1 ، بY=1 ، بY=1 ، بY=1

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(t-\dot{x})(t+\dot{x})^{\gamma}} \pounds t\ddot{x} = \frac{t}{\gamma} \cdot \ell_{\alpha} \dot{x} + (-\gamma) \frac{t}{(-\gamma)(t+\dot{y})^{\gamma}} + \frac{-t}{t+\dot{x}} + \frac{t}{\gamma} \cdot \ell_{\alpha}(t+\dot{x}) + \epsilon$$

$$= \frac{t}{\gamma} \cdot \ell_{\alpha} \dot{x} + \frac{t}{(t+\dot{x})^{\gamma}} - \frac{t}{t+\dot{x}} + \frac{t}{\gamma} \cdot \ell_{\alpha} \dot{x} + (t+\dot{x}) + \epsilon$$

# ٢ - التكاملات التي تحل وفق تحويلات أولر:

وهي تكاملات من الشكل إح(س، السبب +بس+ ج).دس

حيث ﴿، ب، جـ ∈ ス ونميز من أجله ثلاث حالات هامة:

أ- عندما يكون ا> عندئه سنفرض التحويل من السشكل





٧١٠٠ + بس + ج ١٠٠٠ أ. س + ت ويسمى هذا التحويل تحويل أولر الأول.

الآن بتربيع الطرفين للتحويل نجد أن:

اس ۲ + س + جــ = اس ۲ + ۲ اس ب + ۲ س

 $\psi(\bar{\nu})$  تابعاً کسریاً  $\psi = \frac{\bar{\nu} - + -}{\bar{\nu}} \Rightarrow \omega = \psi(\bar{\nu})$  د  $\psi = \psi(\bar{\nu})$ 

عندئلٍ بتعويض المتحول دس، س في التكامل:

$$w = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{2} - \frac{1}{2}}{(-1)^{2} - \frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(-1)^{2} = 0$$

کسري.

مثال:  $ص= \int \frac{v \cdot v \cdot v}{\sqrt{h} \cdot v + v + 1}$  بملاحظة أن تحويل أولر الأول ينصبح في هـذه الحالـة كون  $\{-1>0\}$ 

عندئد بفرض س+ت=الس ٢+س+١=س١ +س+١=س١ +٢س.ت+ت٢

$$- \frac{1-\frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}$$

$$\stackrel{\leftarrow}{\hookrightarrow} \frac{1-\frac{\tau}{\omega}}{(\omega_{Y}-1)(1-\frac{\tau}{\omega})(1-\frac{\tau}{\omega})} = \frac{1-\frac{\tau}{\omega}}{1-\frac{\tau}{\omega}} = 0.5. \frac{\frac{1-\frac{\tau}{\omega}}{\omega_{Y}-1}}{\frac{\tau}{(\omega_{Y}-1)}} = 0.5. \frac{\frac{1-\tau}{\omega_{Y}-1}}{\frac{\tau}{(\omega_{Y}-1)}} = 0.5. \frac{1-\frac{\tau}{\omega_{Y}-1}}{\frac{\tau}{(\omega_{Y}-1)}} = 0.5. \frac{1-\frac{\tau}{\omega_{Y}-1}}{\frac{\tau}{(\omega_{Y}-1)}}{\frac{\tau}{(\omega_{Y}-1)}} = 0.5. \frac{1-\frac{\tau}{\omega_{Y}-1}}{\frac{\tau}{(\omega_{Y}-1)}} = 0.5. \frac{1-\frac$$

والأخير هو تكامل كسري نكامله كما ورد معنا في التوابع الكسرية. الأمـر الذي نترك إكماله للقارئ.





ب- تحويسل أولسر الشاني: يكسون هسذا التحسول مسن أجسل التكامسل آج (س، الإس، +بس+ج). دس في حالة ج>،

من أجل هذه الحالة نجري ١١٠ اس + بس + جـ = ست + الجـ

 $= cm = \psi(r)$  . دت حیث  $\psi(r)$  تابعاً کسریاً.

الآن بتعويض المتحول الجديد في التكامل نجد أن

$$= \int \frac{\gamma \sqrt{-1 - \gamma}}{\gamma \sqrt{-1 - \gamma}} \cdot \frac{\gamma \sqrt{-1 - \gamma}}{\gamma - \gamma} \cdot \frac{\gamma \sqrt{-1 - \gamma}}{\gamma - \gamma} = \int \frac{1}{\gamma} \sqrt{-1 - \gamma} \sqrt{-1 - \gamma} \sqrt{-1 - \gamma}$$

مثال:  $\omega = \int \frac{\omega}{\omega \sqrt{\omega^2 + \omega + 1}}$  نلاحظ أن جـ=١>، يمكن استخدام تحويل أولر الثاني من أجل هذا التكامل:  $\sqrt{\omega^2 + \omega + 1} = \omega = 1$ 

س ٔ + س + ۱ = س ٔ ت ٔ + ۲س ت + ۲س ت + ۱ = س (ت ۱-۱) = ۲ت-۱

$$\omega = \frac{\gamma - \gamma}{\gamma - 1} \Rightarrow \omega = \frac{-\gamma - \gamma^{2} + \gamma - \gamma}{(1 - \gamma)^{2}}, \omega$$

الآن بإدخال ت إلى التكامل نجد أن ص=  $\left\{\frac{1-2i+2i-1}{(2^{i}-2^{i})}\right\}$ . دت  $\frac{1-2i+2i-1}{1-2i+2i-1}$  بالآن بإدخال ت إلى التكامل نجد أن ص=  $\left\{\frac{1-2i+2i-1}{1-2i-1}\right\}$ 

بعد الإصلاح = 
$$\int \frac{-Y(\bar{c}^{-1}-\bar{c}^{-1})}{(\bar{c}^{-1}-1)(Y^{-1}-Y^{-1}-Y)}$$
دت





والأخير تكامل كسري يمكن حله وفق ما درسناه مسابقاً في تكامل التوابع الكسرية الأمر الذي نتركه للقارئ.

جـ- تحویل أولر الثالث: إذا كانت المعادلة أس  $^{Y}$  +  $\phi$  س + جــ= • تملك جذرين مختلفين مشل  $\omega_{Y}$  ،  $\omega_{Y}$  عندند يمكن الكتابة أس  $^{Y}$  +  $\phi$  س + جـ= أ( $\omega_{Y}$ - $\omega_{Y}$ )

من أجل هذه الحالة سنكتب التكامل:

$$c = \int \int (u, \sqrt{|(u - u), (u - u)|}) \cdot c u = \int \int (u, \sqrt{|u - u|}) \cdot \sqrt{\frac{u - u \cdot v}{|u - u|}}$$

$$c = \int \int (u, \sqrt{|u - u|}) \cdot \sqrt{|u - u|} \cdot$$

حيث ψ(ت) تابع كسري دس= ψ(ت) . دت

$$\text{cos} \left[ \sqrt{\omega_{\gamma}} \frac{1}{\gamma_{\gamma}} \sqrt{\omega_{\gamma}} \right] \cdot \frac{1}{\gamma_{\gamma}} \left[ \sqrt{\omega_{\gamma}} \frac{1}{\gamma_{\gamma}} \sqrt{\omega_{\gamma}} \right] \cdot \sqrt{\omega_{\gamma}} \left[ \sqrt{\omega_{\gamma}} \sqrt{\omega_{\gamma}} \right] = 0$$

وهذا الأخير هو تكامل كسري.

مثال:

$$1+0$$
 الآن نلاحظ أن س  $1+1$ س +  $1=(m+1)$  (س+۱) (ص+۱)

$$\frac{1+\omega^{\prime}}{\gamma+\omega^{\prime}} = \frac{1+\omega^{\prime}}{\gamma+\omega^{\prime}} \cdot \frac{1+\omega^{\prime}}{\gamma+\omega^{\prime}}$$

$$\omega \Box^{\gamma} + \gamma \Box^{\gamma} = \omega + l \Rightarrow \omega = \frac{l - \gamma \Box^{\gamma}}{l - l} \Rightarrow l \omega = \frac{\gamma \Box}{(\Box^{\gamma} - l)^{\gamma}}. C\Box$$





ص= آت.  $\frac{r = r}{(r - r)}$ . د $r = \frac{r = r}{(r - r)}$  والأخير تكامل كسري يحل وفق ما درسناه في مكاملة التوابع الكسرية.

### ٣- تكامل ثنائي الحد التفاضلي:

تعریف: تعرف التابع ق(س)= س ( (س  $^{0}+\psi)^{1}$  حیث م، ن، ر  $\in$  ك بثنائي حد تفاضلي.

الجدير بالذكر أن تشيبتشيف برهن على أن التكامل:

ص= أس، (إس ن+ب)، .دس

يكون قابلاً للمكاملة فقط في الحالات الثلاثة التالية:

١. إذا كانت ر ∈ ص أي ر عدداً صحيحاً.

۲. إذا كانت م+۱∈ص

٣. إذا كان م+١+ردص

وفي غير هذه الحالات الثلاث السابقة برهن تشيبتشيف أن هـذا التكامـل لا يقبل التعبير عنه بدلالة توابع أولية – أي لا يمكن مكاملته.

الآن سوف نتعرف على طريقة مكاملة لكل حالة على حدة.

١ - إذا كانت ر ∈ ص فإننا سنميز حالتان:

أ- ر>٠ عندئذ يمكن نشر المقـدار ( ﴿ س ْ جب ُ و فـق منـشور الكرخـي – نيوتن ليصبح لدينا ( ﴿ س ْ جب ُ '= ﴿ ا س ْ ا + ... + أ





وبالتالى يصبح لدينا شكل التكامل بالصيغة

 $\int_{0}^{\infty} (q_{m} c + \mu)^{r} \cdot cm = \int_{0}^{\infty} (q_{m} c^{l} \cdot + ... + q^{l}) \cdot cm$ 

= [٩ س' +...+١س' .دس ولدينا بالتالي م، ... م وب، و، أعداد كسرية.

وتصبح مكاملة أي حد منها بالشكل  $|w|^2$  دس= $\frac{w^{1+1}}{(-1+1)}$ 

ب- ر< عندئذ سنفرض س= ت ب حيث ب هو المضاعف المشترك

الأصغر لمقام م، ن عندئد دس= ب. ت الما . دت

ويصبح شكل التكامل ص=إت الرات البار بالماد بالماد بالماد بالماد التكامل

حيث (ن١)، (ن١)، (ب-١) أعداد صحيحة.

وبالتالي وباعتبار ر<٠ يمكن إيجاد عدد مثل ي بحيث ي= -ر ليصبح بـذلك  $= -\frac{1}{(1-v^2)^{n+1}}$ 

والأخير هو تكامل كسري.

٢- إذا كان م + أ ∈ ص في التكامل أس (اس ن+ب) -

وذلك بفرض ر $\frac{b}{2}$ ، ن $\frac{b}{c}$ ، م $\frac{a^2}{c}$  وذلك لأن م، ن، ر  $\in$  ك

سنجري في هذه الحالة تغييراً للمتحول بالشكل (س $^{\mathrm{o}}+\mathrm{p}=\mathrm{c}^{\mathrm{b}}$ 

حيث ك هو المضاعف المشترك الأصغر للأعدادي، و، ر

$$\frac{1}{0}\left(\frac{-\frac{4}{0}}{1}\right) = \omega = \frac{1}{0} = \frac{1}{0} = 0$$
 in its in the second of the s



الآن يمكن إيجاد دس بالشكل  $v_0 = \frac{1}{v} \left( \frac{v_0 - v_0}{r} \right)^{1/2}$ . كت الآن يمكن إيجاد دس بالشكل  $v_0 = \frac{1}{v}$ 

وبتعويض ما حصلنا عليه في التكامل المطلوب

enterption in  $\frac{1+r}{i} \in \omega \Rightarrow \frac{1+r}{i} - 1 \in \omega$ 

وبالتالي يوجد عدد صحيح لنفرض أنه  $\rho$  بهيث  $\frac{\eta+1}{0}$  وبالتالي يصبح شكل التكامل:

=  $\frac{b}{c^{+0}}$   $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int$ 

٣- إذا كانت <sup>n++</sup> +١∈ صمن أجل التكامل ص= إس (إس ٠+٠) عند ثلث سنجرى أولاً الإجراء التالي:

ص= أس السند ((+بس-ن) د .دس= أس المند ((+بس-ن) د .دس

الآن سنفرض أن  $r^2 = 4 + p - m^{-6}$  حيث ك هي المضاعف المشترك الأصغر لمقام كلاً من الأعداد م، ن، ر فيصبح لدينا:

$$\text{C3.} \stackrel{\text{L4}}{\sim} \text{C4.} \stackrel{\text{L}}{\sim} \left(\frac{\text{p-d}}{\text{c}} \stackrel{\text{L}}{\sim}\right) \cdot \frac{\text{p-d}}{\text{c}} \stackrel{\text{L}}{\sim} + \frac{$$





وبالتالي يصبح لدينا التكامل:

$$d_{2} = \int_{0}^{1-\delta} d_{1} d_{2} \frac{1}{2} \frac{d_{2}}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int_{0}^{1-\delta} d_{1} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int_{0}^{1-\delta} d_{2} \frac{1}{2} \int_{0}^{1-\delta} d_{2}$$

$$= \{\frac{-b}{i.c}, \frac{1+b}{i}, \frac{1+b}{i}, \frac{b}{i}, \frac{b}{i}\}$$

فيمكن عندها كتابة التكامل  $\omega = \frac{-b}{(\psi + \tau)}$  (ت  $\psi = 0$ ). دت ونحن هنا أمام الحالة الأولى أو تكامل كسري.

مثال وتطبيق: احسب كلاً من التكاملات التالية:

$$-0$$
 =  $-0$ 

#### الحل:

۱ – نلاحظ من أجل التكامل  $ص_{i} = [m^{7/7}, (m^{1/7}+1)^{7}, cm]$  أن  $c = Y \in m^{+}$  عند ثلَّ سنكتب التكامل:





$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} \frac{$$

٢- نلاحظ أنه من أجل ص= إس٠٠١. (س ٢٠٠٠)-٢.دس أن ر= ٢٠ ∈ ص

وهذه الحالة الأولى بـذلك سنفرض أن س= ت حيث ٦ هـو المضاعف المشترك الأصغر للعددين ٢، ٣ فيصبح لدينا دس= ٢٠°. دت

٣- الآن من أجل التكامل ص, = إس '' (١+ '' ١- '') دس

الآن سنلاحظ أن ر $=\frac{1}{7}$  و من فهو ليس من الحالة الأولى.

لللك سنلاحظ أن ن=
$$\frac{1}{\gamma}$$
، م= $\frac{\gamma}{\gamma}$  عبد  $\frac{1+\gamma}{\gamma}$  =- هوص

لذلك سنفرض أن  $\mathbf{r}^{\mathsf{T}} = \mathbf{m}^{-1/\mathsf{T}} + 1 \Rightarrow \mathsf{T}^{\mathsf{D}}.$   $\mathbf{r}^{\mathsf{D}} = \frac{-1}{\mathsf{T}}.$   $\mathbf{m}^{\mathsf{T}/\mathsf{T}}.$   $\mathbf{r}^{\mathsf{D}} = \mathbf{r}^{\mathsf{T}/\mathsf{T}}$  .  $\mathbf{r}^{\mathsf{D}} = \mathbf{r}^{\mathsf{T}/\mathsf{T}} = \mathbf{r}^{\mathsf{T}/\mathsf{T}} = \mathbf{r}^{\mathsf{T}/\mathsf{T}}$ 





حه دس= −٤ ث. (ت¹-١) . دت دت

الآن بتعويض ما حصلنا عليه في التكامل نجد أن:

ص = (ت ۲-(۱-۲) - ۳. ت. - کت. (ت ۲-(۱-۲) - ۲. دت

=  $-3\int \frac{c^{-1}}{(c_{-1})^{2}}$ .  $c^{-1}$  وهو تكامل كسري أنتركه للقارئ!

٤- الآن من أجل التكامل ص، = إس " \( + س " ) ' \ ° . دس

بملاحظة أن ر= أو صإذن فالتكامل ليس من الحالة الأولى.

وبملاحظة أن م= -۱، ن= -۱  $\Rightarrow \frac{\eta+1}{\upsilon} = \frac{-1}{1-\varepsilon} = 1$ 

وبالتالي فنحن أمام الحالة الثانية:

عندئادٍ فإننا سنجري تغييراً للمتحول  $1+m^{-1}=$ ت°

= س-¹= ت°-۱ = س= (ت°-۱)-¹

ح دس= -۱ (ت ُ-۱) × ۵ت . دت

الآن بالتعويض في التكامل:

ص = / (ت ° - ۱) . ث . (۱-) (ت ° - ۱) × ه ث . د ت

 $=\int -60^{\circ} \cdot (0^{\circ} - 1)^{\gamma-\gamma} \cdot (0^{\circ} - 1)$ 

٥- الآن من أجل التكامل ص = إس٢٠. (٢+س٢)-(٢٠ دس

نلاحظ أننا أمام الحالة الثانية لأن ر $\frac{-1}{7}$ وس،  $\frac{\eta+1}{7}=\eta + \frac{\pi}{7}=1$ وس نلاحظ



 $^{1}$ عندئارِ سنفرض أن  $^{2}$  + س

$$_{\sim}^{-1}$$
 دن  $_{\sim}^{-1}$  (۲-۲ میر)  $_{\sim}^{+1}$  دن  $_{\sim}^{+1}$  (۲-۲ میر) دن

$$-\frac{\xi}{r} = \text{dis} \Big\{ \frac{\xi}{r} = \text{dis} \Big\} \cdot \frac{\xi}{r} = \text{dis} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{$$

7- مـــن أجـــل التكامـــل ص. = إس ٢٠٠ (س ١٠٠١ دس نلاحـــظ أن  $c=\frac{1}{7}$  م  $=\frac{1}{7}$  ،  $c=\frac{1}{7}$  و التكامل ليس من الحالة الأولى  $c=\frac{1}{7}$  ه صوليس من الحالة الثانية لأن  $\frac{1}{12}$  و  $\frac{1}{12}$  ه صوبيلاحظة أن من الحالة الثانية لأن  $\frac{1}{12}$  من الحالة الثانية لأن  $\frac{1}{12}$  من الحالة الثانية الثانية الأن  $\frac{1}{12}$  من الحالة الثانية الأولى من الحالة الثانية الأن التحديد المنافقة الأولى من الحالة الثانية الأولى من الحالة الثانية الأن التحديد التحديد التحديد التحديد التحديد الثانية الأولى من الحديد الثانية الأولى من الحديد التحديد التحديد

 $\frac{\eta+1}{0} + (-\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 1 = \infty)$  فنحن إذن أمام الحالة الثالثة.

لذلك فإننا أولاً سنكتب التكامل بالشكل:

$$\omega_r = \int_{0}^{\infty} \sqrt{\tau} \cdot (1+w^{-1}) \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \epsilon w = \int_{0}^{\infty} \sqrt{\tau} \cdot (1+w^{-1}) \cdot \tau \cdot \epsilon w$$

ثم سنفرض أن  $v^{-1} = 1 + w^{-N/T} \Longrightarrow w = (v^{-1} - 1)^{-N/T}$ 

$$= cw = \frac{r}{\lambda}. (2^{r-1}/(1-1))^{-1/\lambda}.$$

عندئذ سنكتب التكامل:

$$^{\circ}$$
  $^{\circ}$   $^{\circ}$ 





 $4 - \frac{\Lambda}{\tau} \left( \frac{\Lambda}{1 - \tau} \right) \left( \frac{4 - \tau}{\xi} \right)$ 

والأخير هو تكامل كسري.

### التكاملات المثشة

تعريف: نقول عن التكامل أنه تكاملاً مثلثياً إذا كان التكامل يجوي جا س أو جنا س أو ظا س أو ظنا س.

وبملاحظة أن التابعين ظا س، ظتا س يمكن التعبير عنهما بدلالة جتا س، جا س عندتلز يمكن التعبير عن التكامل المثلثي بالشكل:

ص= إح (جاس، جناس).دس

في الواقع فإن التكاملات المثلثية يمكن إرجاعها إلى تكاملات كسرية أو تكامل ثنائي الحد التفاضلي في غالب الأحيان وذلك وفسق التحويلات العامة المثلثية والتي سنوردها بالشكل:

التحويلات العامة المثلثية: جاس=جا٢.  $\frac{\infty}{\gamma}$  -٢. جا  $\frac{\infty}{\gamma}$  . جنا  $\frac{\infty}{\gamma}$ 

 $\frac{V^{\text{hl}}}{Y}$  الآن بضرب المقدار وقسمته على جتا  $\frac{V^{\text{h}}}{Y}$  نجد أن: جاس =  $\frac{V^{\text{hl}}}{Y}$  الآن بضرب المقدار وقسمته على جتا  $\frac{V^{\text{hl}}}{Y}$ 

ولدينا أيضاً جنا $\frac{-\gamma + 1}{\gamma}$  الآن إذا أجرينا التبديل ظا $\frac{\omega}{\gamma}$ =ت عندئالي ولدينا أيضاً جنا $\frac{\omega}{\gamma}$ =ت عندئالي





$$\frac{r\ddot{\omega}-1}{r\ddot{\omega}+1}=\omega l\ddot{\varphi} \quad (\frac{\ddot{\omega}r}{r\ddot{\omega}+1}=\omega l\dot{\varphi}$$

أما من أجل د س فنلاحظ أن قوسظات= ١٠٠٠

 $\rightarrow w=1$  قوس ظات  $\Rightarrow v=\frac{7v^2}{1+v^2}$  وهكذا إذا أردنا إراء التحويل العام المثلثي سوف نكتب:

$$\frac{\gamma + \gamma}{\gamma + \gamma} = \frac{\gamma + \gamma}{\gamma + \gamma} + \frac{\gamma + \gamma}{\gamma$$

أمثلة شهيرة: أوجد كلاً من التكاملات المثلثية التالية:

#### الحل:

من أجل التكامل إدان فإنه إجراء التحويل المثلثي العام نجد أن

$$=\int \frac{c\, \dot{\upsilon}}{\dot{\upsilon}} = \log_{\lambda} \ddot{\upsilon} + c. = \log_{\lambda} \left( \frac{dJ}{dJ} \right) + c.$$





$$=\int \frac{\gamma_{L} \dot{v}}{1-\dot{v}^{2}}=\gamma_{L} \frac{1}{\gamma_{L}} \cdot i e_{L} \left(\frac{1-\dot{v}}{1+\dot{v}}\right) = -i e_{L} \left(\frac{1-\dot{v}}{1+\dot{v}}\right) + \frac{1}{\gamma_{L}} + \frac{1}{\gamma_{L}} \frac{1}{\gamma_{L}} + \frac{1}{\gamma_{L}} \frac{1}{\gamma_{L}} + \frac{1}{\gamma_{L}} \frac{1}{\gamma_{L}} \frac{1}{\gamma_{L}} + \frac{1}{\gamma_{L}} \frac{1}{\gamma_{L}} \frac{1}{\gamma_{L}} + \frac{1}{\gamma_{L}} \frac{1}{\gamma_{L}} \frac{1}{\gamma_{L}} \frac{1}{\gamma_{L}} + \frac{1}{\gamma_{L}} \frac{1}{\gamma_{L}$$

٣- من أجل التكامل إجاب بناس بإجراء التحويل المثلثي العام نجد
 أد:

$$\Delta = \int \frac{\gamma_L \dot{\nabla} / l + \dot{\nabla}^T}{\gamma_L \dot{\nabla} / l + \dot{\nabla}^T} = \int \frac{\gamma_L \dot{\nabla}^T}{l + \gamma_L \dot{\nabla}^T} \frac{1}{l + \dot{\nabla}^T} \frac{\gamma_L \dot{\nabla}^T}{l + \dot{\nabla}^T} \frac{1}{l + \dot{\nabla}^T} \frac{\gamma_L \dot{\nabla}^T}{l + \dot{\nabla}^T} \frac{1}{l + \dot{\nabla}^T} \frac{1}{l + \dot{\nabla}^T} \frac{\gamma_L \dot{\nabla}^T}{l + \dot{\nabla}^T} \frac{1}{l + \dot{\nabla}^T} \frac{1}{l$$

والأخير هو تكامل كسري. قد درسناه سابقاً.

٥- الآن من أجل ص= إجاس. جناس.دس

يمكن الفرض ت=جاس عدت جانس عدس متاس

عندئلرٍ ص= التعارية عنديلرٍ ص= التعارية عنديلرٍ ص= التعارية التعارية

حالة خاصة ومهمة في التكامل المثلثي:

ص= [جاس. جنادس.دس

الآن بفرض أننا عوضنا ت= جاس ⇒ دت= جتاس دس

حص مں اِت، جتابس دت

لكن جنا س= (١- جا<sup>٢</sup> ت)

عندئذ فإن ص=إت٬ (١-ت٬ ) دت





والتكامل الأخير كما نعلم هـو تكامـل ثنـائي حـد تفاضـلي. ويكـون هـذا التكامل قابلاً للمكاملة إذا كان:

$$1-\frac{\zeta-1}{\gamma}=0$$

$$\gamma - \frac{\gamma + \zeta}{\gamma} = \frac{\gamma + 1}{\gamma} + \frac{\zeta - 1}{\zeta} \in \Delta$$

وفي غير هذه الحالات فإن هذا التكامل حسب تشييت شيف لا يمكسن التعمير عنه بدلالة توابع أولية أو أن هذا التابع غير قابل للمكاملة.

خلاصة القول: يمكن حل التكامـل أجاس. جتا س.دس في حـالات ثلاثـة فقط:

ولا يمكن حله في غير هذه الحالات.

ملاحظة هامة: أن التبديلات العامة المثلثية وكما سبق وأن ذكرنـا تــرُد أي تكامل مثلثي إلى تكامل كسري أو تكامل ثنائي حد تفاضلي.

لكن التبديلات العامة في غالب الأحيان تعطي كسوراً ذات درجات كبيرة وليست سهلة لذلك سنكتب فيما يلي بعضاً من التحويلات الخاصة.





#### التحويلات المثلثية الخاصة:

بفرض لدينا التكامل ص= إح(جاس، جناس). دس عندشد سوف نميـز شـلاث حالات:

عندال سنفرض أن ت= جا س ونجري التكامل عندها بصورة أبسط.

مثال: ص= إجاس. جناس دس

الآن علاحظة أن:

وبالتعويض في التكامل نجد أن:

مثال: ص= حاس.دس الآن بملاحظة أن:

$$\sqrt{\frac{\sin^3 w}{-\sin^3 w}} = \frac{\sin^3 w}{-\sin^3 w} = \sqrt{\sin^3 w}$$





وبتعويض ما حصلنا عليه في التكامل نجد أن:

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{100} \left( \frac{1}{100} \frac{1}{100} \right) \left( \frac{1}{100} \frac{1}{100} \frac{1}{100} \right) \left( \frac{1}{100} \frac{1}{100} \frac{1}{100} \frac{1}{100} \frac{1}{100} \right) \left( \frac{1}{100} \frac{1}{100}$$

الآن من أجل التكامل الأخير نجري عملية قسمة حدودية ت<sup>1</sup> على (١-ت<sup>٢</sup>) ونحله كتكامل كسرى.

مثال: ص= $\frac{+ اس. جنائس}{1 + + 1 + 1 + 1}$ دس الآن سنلاحظ آن:

ح(-جاس، جاس)=جاس جائي =-ح(جاس، جاس)

لذلك سنجري التحول جناس=  $v \Longrightarrow v = \frac{-v^2}{e^{1/2}}$  وبالتالي يصبع التكامل:

$$-\frac{-1}{1+(1-1)^{\gamma}}$$
دت وهو تكامل كسري.

ب- إذا كان لدينا ح (جا س، -جتا س)= -ح (جا س، جتا س).

سنفرض في هذه الحالة أن جا س= ت ونحل التكامل.

مثال: ص= إجتا سجا أس.دس نلاحظ أن

 $(-1)^{8}$   $(-1)^{8}$ 





وبتعويض ما حصلنا عليه في التكامل نجد أن:

ص= أجنائت بدت= ((-ت المرابع ال

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}2}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}2}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}2}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1+\frac{1}2}}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1+\frac{1}2}}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac$$

سنفرض من أجل ذلك أن جا س= ت دس=  $\frac{cr}{\pi i w}$  عندالذ يصبح التكامل:

$$\omega = \int_{1+\tilde{\omega}^{\gamma}}^{-\tilde{\omega}^{1}} e^{-\tilde{\omega}^{\gamma}}$$
. دت والأخير مجل ببساطة بالشكل:

$$-\frac{(-\frac{v}{2})^{2}}{(v+1)^{2}}$$
. دث=  $-\frac{1}{1+v}$  . دث=  $-\frac{1}{1+v}$  . دث=  $-\frac{v}{1+v}$  . دث=  $-\frac{v}$  . دث=  $-\frac{v}{1+v}$  . دث=  $-\frac{v}{1+v}$  . دث=  $-\frac{v}{1+v}$  . دث

مثال: [جنا™.دسسنلاحظ مباشرة أن ∑(جا س، –جنا س)= −∑(جـا س، جنا س) عندئد سوف نفرض جا س= ت <del>= ></del> دس=<u>دت</u> جناس

ص= اجتادس.دت= ((-ت، ۲(-ت، المراح + ۳ت، ۲۵۰ + ۳ت، دت

$$-+\frac{\omega^{V}|_{+}}{v}+\omega^{\circ}|_{+}-\frac{v}{o}+\omega^{V}|_{+}-\omega|_{+}-+\frac{v}{v}+\frac{v}{v}+\frac{v}{o}+\frac{v}{v}+\frac{v}{o}+\frac{v}{v}+\frac{v}{v}+\frac{v}{o}+\frac{v}{v}+\frac{v}{o}+\frac{v}{v}+\frac{v}{o}+\frac{v}{o}+\frac{v}{v}+\frac{v}{o}+\frac{v$$

مثال: ص=[جاس+۱...دس نلاحظ أن ح(جا س، جنا س)=ح(جا س،

جتا س) عند ثلث سوف نفرض ت= جا س = دس= دن ويصبح التكامل: هتاس ويصبح التكامل:



 $\omega = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^* \cdot (1 - \dot{u}^*)} \cdot c\dot{u} = \int \frac{\dot{u} + 1}{\dot{u}^$ 

ج- إذا كان لدينا ح (-جاس، جناس)= ح (جاس، جناس) عند لله سنفرض إمات الخاس أو ت ظاس أو ت طنات و نكمل التكامل.

 $\mathbf{ailb}: \mathbf{a} = \int \frac{e^{1} \mathbf{w}}{e^{1} \mathbf{w}} \cdot \mathbf{k} \mathbf{w}$ 

الحل: سنلاحظ أن ح (-جا س، -جتا س)= ح (جـا س، جتـا س) عندئـذ سوف نفرض أن ت= ظاس حجه دت= حتا من حب دس= جتا م. دت

الآن يصبح لدينا التكامل

ص= أجاً س. دس= إظاسجا سدس= إن جا س. جنا س. دت

الآن بضرب ما داخل التكامل وقسمته على جتاءً س نجد أن:

 $-1^{r}$  دت والأخير هو تكامل كسري  $-1^{r}$  دت والأخير هو تكامل كسري  $-1^{r}$ 

مثال: ص= إظاس دس نلاحظ أن:

ح(-جاس،- جناس)=-جاس =ظاس=ح(جاس، جناس)

عندئذ سوف نعوض ت= ظا*س == دس= ج*تا<sup>7</sup>س. دت

ويصبح التكامل:

 $\omega = \int \dot{D}$ ,  $d = \int \frac{\dot{D}}{1 + \dot{D}^{T}} \cdot c \dot{D} = \frac{1}{Y}$ ,  $e_{x}(1 + \dot{D}^{T}) + e_{x}$ 





 $a_{-\frac{1}{1}}$ ,  $b_{1} = \frac{1}{4}$ 

مثال:  $ص = \int \frac{-k u}{1+a^{1/2}} c u$  مثال:  $\alpha = \int \frac{-k u}{1+a^{1/2}} c$  مثال:  $\alpha = \int \frac{-k u}{1+a^{1/2}} c$ 

س، جتا س) وسنفرض ذلك أن ظاس= ت = دس= جتا س. دت

$$\frac{\omega_{1}}{\omega_{1}} = \frac{\omega_{1}}{\omega_{1}} = \frac{\omega_{1}}{\omega$$

وبتعویض ما حصلنا علیه في التکامل نجد أن:  $\omega = \int_{(\dot{u} + \dot{u}^{+} + \dot{u}^{+})}^{\dot{u}}$ . دت وهو تکامل کسري يمکن حله وفق ما تعلمنا سابقاً.

مثال:  $\frac{u}{|x|^{l}w}$  نلاحظ أن (-جا س، -جتا س)= (جا س، جتا س).

وسنجد أن ظام = ت مناسب لإجراء التكامل وسنكتب دس =  $\frac{c\bar{\nu}}{1+\bar{\nu}}$  ونعـوض مـا حـصلنا عليـه في التكامـل وذلـك بملاحظـة أن جاء  $= \frac{d^2 m}{1+d^2 m}$  عن  $= \frac{d^2 m}{1+d^2 m}$ 

## هو تكامل كسري بسيط.

أخيراً: إذا كان التكامل المثلثي لدينا لا يخضع لأي من حالات التحويل الخاص الثلاثة فإنه عندئل لابد من استخدام التحويلات العامة أو تحويلاً خاصاً بالحالة التي بين يدينا وعلى كل حال فإن مسألة إجراء التحويلات والحدس بفائدتها من عدمه تأتي بعد التوفيق من الله تعالى من الخبرة وكثرة حل المسائل. مثال: أجد س التحويل المناسب لكلاً من التكاملات المثلثية التالية وبين إلى ماذا يؤول مع التحليل؟





١- ص= [ دس المثاني المناسب هنا هـ و التحريل المثلثي العـام.
 كون هذا التكامل لا يخضع إلى أي من حالات التحويل الخاص ويؤول إلى
 تكامل تابع كسري.

٢- ص= التحويل المناسب هـو التحويل العـام لعـدم خضوع هذا التكامل أي من حالات التكامل الخاص ويـؤول إلى تكامـل تابع كسري.

٣- ص= المحاملة لأنه باعتبار فإنه - ص= المحاملة الأنه باعتبار فإنه

س= إجاس <sup>-</sup> جناس دس

$$Y = \frac{1+1}{4} = \frac{-1/4+1}{4} = \frac{1+1}{4} = \frac{1+1}{4}$$

وبالتالي حسب تشيبتشيف فإن التابع غير قابل للمكاملة.

- إجاس. جتا س= ت وذلك أن التحول جتا س= ت وذلك أن ح (-جا س، جتا س) وسيرد إلى تكامل بسيط من الشكل إن 17/7.دت
  - ٥. إجامن دس من أجل هذا التكامل سنجري التحويل جتاس= ت

لأن ح (-جا س، جتا س)= -ح (جا س، جتا س).

وسيرد إلى تكامل كسري.





7.  $\int \frac{-kw}{-k^{1}w} \frac{-kw}{w} \cdot kw$  سنجري هنا التحويل ظاس= ت وذلك أن ح (- جاس، جتاس)=  $\int (-kw) \frac{k}{w} \frac{k}{w} \cdot kw$ 

وسيرد هذا التكامل إلى تكامل كسري.

٧. أَالْظَاسَ.دس سنفرضهنا التحويل ظاس= ت كون ∑ (-جاس، -جتاس)
 = ∑ (جاس، جتاس).

وسيرد هذا التكامل إلى تكامل ثنائي حد تفاضلي.

تمهيد: ناقشنا إلى حد الآن تكاملات مثلثية تكون فيها أمثال س موحدة لـدى جميع التوابع جتاس، جاس ونريد الآن مناقشة الحالات التي يكون فيهـا أمثال مختلفة لـ س داخل التوابع المثلثية مثل: المحاسس.دس

 $[-+]_{N}$   $[-+]_{N}$   $[-+]_{N}$   $[-+]_{N}$   $[-+]_{N}$ 

 $[-1]_{M} = \frac{1}{2} [-1]_{M} - \frac{1}{2} [-1]_{M} -$ 

 $[w.(-1)^{-1}]_{V} = -w.(++1)^{-1}$ 

٤- جا٢ س= ٢. جاس. جتاس

۰ - جتا ۲ س = جتا <sup>۲</sup> س – جا <sup>۲</sup> س

مثال: أوجد كلاً من التكاملات التالية:

 $1 - \omega_{i} = \int A M_{i} A V_{i} u_{i} \cos \theta$ 

۲- ص،= إجاس، جتا اس دس





 $Y- \omega_{1} = \int -1 \, d^{3} x \, d^{3}$ 

$$-0 = \int \frac{(Y/w)^{+1}}{+w} cw$$

الحل:

I - المن من = [جا ۸س.جا ۷س.دس=  $\int_{V}^{I} [ جناس - جناه ۱س].دس$ 

$$=$$
  $+$   $\left[\omega \log \frac{1}{10} - \omega \right] + =$ 

۲- صر = إجاس. جنا اس دس= أ [جاء اس+جا ٨س] دس

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1}\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\frac$$

 $V_{-} = \int_{\gamma} \int_$ 

 $=\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{2}\log (1+\alpha )}\log (1+\alpha )\right]}} -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\log (1+\alpha )}\log (1+\alpha )\right] +\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\log (1+\alpha )}\log (1+\alpha )\right] +\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{$ 

مى = الجاس +جا٣س +جا٧س +جا٩س.دس

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1$$

٤ - ص₁ = إجتائس. جتا٣س.دس



نلاحظ أن ص، = إجنائس. جناس، دس= إرا جنالس+ جناس]دس

$$-\frac{1}{\gamma} + \left[ \omega + \varphi + \varphi + \frac{1}{\gamma} \right] \cdot \frac{1}{\gamma} =$$

$$0 - \omega_0 = \int \frac{1 + e^2(w/Y) + \omega_0}{e^2} |\vec{V}_0| dV$$
 الأن يمكننا الكتابة

يمكن الفرض مبدئياً أن س= 2. دت على دس= ٢. دت

١+جات دت وبملاحظة أن التكامل الأخير يخضع للعلاقة:

ズ (جات، -جتات)= -﴿ (جات، جتات).

عندئذ سنفرض أن جات= ع ونكمل التكامل.

خلاصة الأمر في حالة وجود أمشال مختلفة لــ س في الشابع المثلثي داخــل التكامل عندئذ يجب العمل على جعل هذا التابع بأمثال موحدة لــ س ثم نفرض هذه الأمثال أس= ت ونعوض في اكامل المثلثي ونتابع على التكامل الأخير مــا تعلمناه في تكامل التوابع المثلثية.

أخميراً مسوف نتصرض إلى تكامـل توابـع عبــارة صن جــداء توابـع مثلثيــة وحدوديات وهي من الشكل:

ص= أر رس).جا إس.دس

ص= أر<sub>ن</sub> (س). جنا إس.دس

في الواقع من أجل ص يبرهن على أنه:





 $\omega = \int_{U_0} (\omega)$ . جتا  $\omega = \omega_0$ . جتا  $\omega + \omega_0$ . جتا  $\omega + \omega_0$ . جيث  $\omega_0$ . جيث  $\omega_0$ . حيث  $\omega_0$ 

و لئن ١٠ (س) حدودية أخرى من الدرجة (ن-١) ذات أمثال غر معينة أيضاً.

ولتعيين أمثال هاتين الحدوديتان علينا أن نشتق العلاقة (\*) ونجري مطابقة وبهذا نكون قد أنهينا حساب هذا التكامل ص.

ومن أجل ص لدينا:

ص = إرن (س). جنا إس. دس = كن (س). جا إس + كن رس). جنا إس + جـ

وأيضاً بنفس الطريقة نشتق العلاقة السابقة ونجري المطابقة ونكون بذلك قـد أنهينا حساب التكامل.

مثال: احسب كلاً من التكاملين:

رس  $-1(س^{2}+1).$ جاس.دس -1

۲- س=(س+۲). جناس.دس

: الحل:

١- سنكتب العلاقة:

 $\int (m^{7}+1) \cdot + im \cdot cm = (im^{7}+im+4) \cdot + im + (cm+e) \cdot + im$ 

الآن نشتق العلاقة:

+ (س'+۱). جاس= (۲ اس+ب). جتاس – (+ اس' + ب س + جس) + جاس + د – جاس + (د. س + و). جتاس.





(س<sup>۲</sup>+۱). جاس= (۲ ا س+ دس+ ب+ و). جتاس + (- ا س ۲ - ب س -- جـ + د). جاس

(س<sup>۲</sup>+۱). جاس= ((۲ (۱ + د). س + (ب + و). جتـاس + (- (س<sup>۲</sup> – ب س – جـ + د) جاس

الآن من أجل ٢ نجد أن:

 $\int (w+Y). \, e^{-\omega} (w+\mu) = (w+\mu) + \omega + e^{-\omega}$ 

الآن باشتقاق العلاقة السابق والإصلاح نجد أن:

(س+۲). جناس= (۵ ۱.س + ۵ب). جناهس + (۱-۵جـ). جاهس

$$\frac{1}{1-1} \xrightarrow{\circ} \frac{1}{1-1} \xrightarrow{\circ} \frac{1}$$

وبالتالي  $\int (w+Y)$ . جنامس.دس= $\left(\frac{1}{0}w+\frac{Y}{0}\right)$ جامس $+\frac{1}{Y}$  جنامس+ج

التكاملات القطعية: وهي التكاملات ذت الشكل

إح (جا ( قطع)س، جا ( قطع)س).دس





أولاً: سنكتب قوانين خاصة للتوابع القطعية.

١ - المطابقة الأساسية جتا (قطع) س - جا (قطع)س = ١

- ٢ ظا ١٠ ( قطع)س -١- حِدًا ١٠ قطع)س -٢ خِدًا ١٠ قطع)س

۱- جا ۱ فطع)س-۱- جا ۱ فطع)س -۱ جا ۱ فطع)س

٤– قوانين جمع الزوايا

جا(قطع) ( ا +ب)س= جا(قطع) اس. جتا(قطع) ب س+ جتا(قطع) اس. جا(قطع) ب س

جا(قطع) ( ١-ب)س= جا(قطع) اس. جتا(قطع) ب س-جتا(قطع) اس. جا(قطع) ب س

جا (قطع) ( ا + ب) س = جتا (قطع) اس. جتا (قطع) ب س+ جتا (قطع) اس. جا (قطع) ب س

جا(قطع) ( ( + ب) س≔ جتا (قطع) ( س. جتا (قطع) ب س− جتا (قطع) ( س. جا (قطع) ب س

٥- قوانين تحويل الجداء إلى جمع=

جا (قطع) إس جا (قطع) بس=  $\frac{1}{7}$  جتا (قطع) (ج-ب) بس جتا (قطع) بس جا (قطع) بس جا (قطع) بس جتا (قطع) بس جتا





جتا (قطع)٢س= ٢جا(قطع)س. جا(قطع)س

جتا(قطع)٢س= جتا<sup>٢</sup>(قطع)س + جا<sup>٢</sup>(قطع)س

٦- جا(قطم) ٢س= ٢جا(قطم)س. جتا(قطم)س

٧- جتا(قطم)٢س= جتا (قطم)س + جا (قطم)س

إن إجراء تكاملات التوابع القطعية تتم بواسطة إحدى ثلاث طرق:

١- التبديلات العامة القطعية.

٢- التبديلات الخاصة القطعية.

٣- حالات خاصة ومهمة.

١- التبديلات العامة القطعية:

وتتم بافتراض ظا $\left(\frac{m}{2} - \frac{m}{2}\right)$  وبملاحظة أن

 $\frac{-1}{1-v} = \frac{1}{1-v} = \frac{1$ 

وذلك بضرب المقدار وقسمته على جنا ﴿ فَطَعُ ﴿ فَا صَاءَ اللَّهُ اللَّا اللَّهُ اللَّالَّالِي اللَّالَّا اللَّالَا اللَّا اللَّلَّا اللَّهُ اللَّهُ اللَّهُ اللَّهُ اللَّهُ اللَّ

 $\frac{1+r}{1-r} \stackrel{\text{co}}{=} \frac{\frac{C^{4}}{\gamma}(\cosh 3)^{\gamma} \stackrel{\text{th}+1}{\mapsto} 1}{-\frac{C^{4}}{\gamma}(\cosh 3)^{\gamma} \stackrel{\text{th}}{\mapsto} \frac{C^{4}}{\gamma}(\cosh 3)^{\gamma} \stackrel{\text{th}}{\mapsto} -\frac{C^{4}}{\gamma}(\cosh 3)^{\gamma} \stackrel{\text{th}}{\mapsto} -\frac{C^{4}}$ 





خلال القول: إذا فرضنا ظا( قطع) س=ت فإنه يصبح لدينا

$$\frac{7 L^{3}}{1-1}$$
 ، جَمَّا (قطع)س=  $\frac{1}{1-1}$  ، د من=  $\frac{7 L^{3}}{1-1}$  ، د من=

مثال: احسب التكاملين:

$$\frac{cw}{-1}$$
  $\frac{cw}{\sin(2\pi a_3)w}$  ,  $\cos(-1)\frac{cw}{\sin(2\pi a_3)w}$ 

الحل:

في الواقع إنه من أجل ص سنطبق التبديلات القطعية العامة لنحصل على

$$\omega = \int \frac{\gamma_c \dot{\omega} / \dot{\omega}}{\gamma_c \dot{\omega}} = \int \frac{c\dot{\omega}}{\dot{\omega}} = \int \frac{c\dot{\omega}}{\dot{\omega}} = \int \frac{dd}{dt} \left( \frac{\partial dd}{\partial t} \right) + e^{-t} dt$$

أما من أجل ص وبإجراء التبديلات القطعية العامة نجد أن:

$$= \int \frac{\gamma_c \dot{D}}{\gamma_c} \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^{1/2} \frac{1}{\gamma_c} dt \right) dt + c = \gamma \log_2 dt$$

مثال: ك= (جا ٢ فطع)س. جنا ٢ قطع)س.دس

الآن بإجراء التبديلات القطعية العامة نجد أن:

$$\text{C3.} \frac{\text{Y}(1+\text{Y}\text{C})\text{Y}\text{CA}}{\text{Y}(1-\text{Y}\text{C})}\Big] = \left(\frac{\text{C3Y}}{1-\text{Y}\text{C}}\right)^{\text{Y}} \left(\frac{1+\text{Y}\text{C}}{1-\text{Y}\text{C}}\right)^{\text{Y}} \left(\frac{\text{C3Y}}{1-\text{Y}\text{C}}\right)\Big] = \text{C3.}$$

والأخير هو تكامل كسري.

ملاحظة هامة: إن التبديلات القطعية ترد أي تكامل قطعي إلى تكامل صحيح أو كسري أو ثنائي حد تفاضلي لكن التبديلات العامة أحياناً نعطي





كسوراً من درجات عليا وذات تكاملات طويلة الحل لذلك ستعرض فيما يلمي تحويلات أخرى وفق حالات خاصة.

٢- التبديلات القطعية الخاصة:

أ- إذا كان لدينا ح (-جــا(قطــع)س، جتــا(قطـع)س)= -ح (جــا(قطـع)س، جتا(قطع)س)

عندئذ نفرض جتا(قطع)س= ت ونجري تكاملاً كسرياً في غالب الأمر.

مثال: احسب كلاً من التكاملات التالية:

١- ص= إجا " ( قطع)س. جنا " ( قطع)س.دس

سع <u>المعاس من المعاس من المعاس من المعاس</u> دس

٣- ص= إجا( قطع)س. جنا القطع)س. دس - المجاد القطع)س. دس

الحل:

عندئل سوف نفرض ت= جتا(قطع)س ⇒ دت= جا(قطع)س. دس ⇒دس= دت چا(قطم)س

وبتعويض ما حصلنا عليه في التكامل نجد أن:





 $-\infty$  = (۱+  $^{*}$  د ).  $^{*}$  (۱+  $^{*}$  د ) (۱+  $^{*}$  (۱+  $^{*}$  د ) (۱+  $^{*$ 

 $+\frac{r}{r}\frac{(\omega')^{2}}{r}+\frac{(\omega')^{2}}{r}\frac{(2\pi i \frac{1}{2})^{2}}{r}=\frac{1}{r}+\frac{r}{r}+\frac{r}{o}=\frac{1}{2}(r^{2}\omega'+\frac{1}{2}\omega')=-\frac{1}{2}(r^{2}\omega'+\frac{1}$ 

 $\frac{c \dot{v}}{k L L L} \Rightarrow c \dot{v} \Rightarrow c \dot{v}$ 

=0  $= \int \frac{x^3 \cdot c^2}{e^4 \cdot (2d^2)^{-1}} = \int \frac{x^3 \cdot c^2}{(x^2 \cdot (1 - x^2))^2} e^{ikg} \cdot x^3 = 0$ 

من أجل ٣- نجد أن التكامل جا( قطع)س. جتا ٢ ( قطع)س دس يحقق أن ٦

(-جا(قطع)س، جتا(قطع)س)= -ح (جا(قطع)س، جتا(قطع)س)

وسنفرض الأن أن جتما (قطع) س= ت عدس=جا قطع) س ويتعويض ما حصلنا عليه في التكامل نجد أن:

 $-\infty = \int_{1+(1-\tau-1)^{\tau}}^{1-\tau} c$  د س والأخير تكامل كسري.

ب- إذا كان لدينا ح (جا(قطع)س، -جتا(قطع)س)= -ح (جا(قطع)س، جتا(قطع)س)



الفعل الفاس

مثال: احسب كلاً من التكاملات التالية:

۱ - ص = آجنا ۱ ( قطع)س جا ۱ ( قطع)س دس

$$Y - \omega = \int_{-1}^{1} \frac{d^{3} (dd) u}{dd} dd$$

٣- ص= إجنا ١ فطع)س دس

$$-8 = \int \frac{+i(\hat{\epsilon}_{d,3})\omega + 1}{-(\hat{\epsilon}_{d,3})\omega + 1} \cos \theta$$

الحل:

مـن أجـل ١- نجـد أن ص= إجنا ( قطع)س.جا ( قطع)س.دس يحقــق أن \$\tag{++ا(قطع)س، -جنا(قطع)س}= -\tag{-(جا(قطع)س، جنا(قطع)س)}

لذلك سنفرض أن جا(قطع)س= ت عدس= حتا فطعاس

وبتعويض ما حصلنا عليه في التكامل نجد أن:

 $\omega = \int (\bar{u}^{-1} - \bar{u}^{-1})^{-1}$  بن آبدت این است این است بدت این است این

 $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1$ 





### وبتعويض ما حصلنا عليه في التكامل:

ج+ ( قطع)س - جا ( قطع)س +جا " ( قطع)س جا ( قطع)س جا ( عطع)س جا ( ع

من أجل ٣- نجد أن التكامل ص= إجنا ﴿ وَطَعَ)س. دس يُحقَّق العلاقة ح (جا (قطع)س، -جنا (قطع)س)= -ح (جا (قطع)س، جنا (قطع)س)

لـذلك سـنفرض أن جـا(قطـع)س= ت = دت= جتـا(قطـع)س. دس -دت -دا(قطع)س

 $0 = \int \frac{1+1}{1+1} \frac{1+1}{(1+1)^{1/2}} = \frac{1+1}{1+1} \cdot \frac{1+1}{(1+1)^{1/2}} = \frac{1+1}{(1+1)^{1$ 

کسري.

جـ- إذا كان لدينا ح (-جا(قطع)س، -جتا(قطع)س)=ح (جـا(قطع)س، جتا(قطع)س)

عندئذ سوف نفرض أن ظا(قطع) $= ت \Rightarrow c = \frac{c r}{1-r}$  ويرد بذلك التكامل إلى تكامل كسري.

أمثلة: احسب كلاً من التكاملات التالية:





$$\frac{c_{0}}{\sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^{2}}}$$
 د  $\frac{c_{0}}{\sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^{2}}}$  د  $\frac{c_{0}}{\sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^{2}}}$  د  $\frac{c_{0}}{\sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^{2}}}$ 

الحل: من أجل ١ – نجد أن التكامل ص=  $\int \frac{e^{1/2}(2dx)}{e^{2/2}}$ . دس عققاً للخاصية

لذلك سوف نفرض تغييراً في المتحول بالشكل

ظا(قطع)س= ت ⇒دس= دت ت -١-٠

وبملاحظة أن التكامل يمكن أن يكتب بالشكل:

 $\omega = \int \frac{1}{\pi^{-1}} (\bar{a}da) da$  .  $\pi^{-1} = \int \frac{1}{\pi^{-1}} (\bar{a}da) da$  .  $\pi^{-1} = \int \frac{1}{\pi^{-1}} (\bar{a}da) da$  .  $\pi^{-1} = \int \frac{1}{\pi^{-1}} (\bar{a}da) da$ 

$$=\int \dot{\Box}^{2}\frac{1}{\dot{\Box}^{2}}\frac{1$$

من أجل ٤- نجد أن إجار قطع)س+١ .دس محقق العلاقة

ح (جا(قطع)س، -جتا(قطع)س)= -ح (جا(قطع)س، جتا(قطع)س)

لـذلك سـنفرض أن جـا(قطـع)س=ت ⇒ دت= جتـا(قطـع)س. دس

وبالتالي يصبح لدينا:

$$=+\frac{1}{\omega}$$
  $=\frac{1}{\omega}$   $=\frac{1}{\omega}$   $=\frac{1}{\omega}$   $=\frac{1}{\omega}$   $=\frac{1}{\omega}$   $=\frac{1}{\omega}$   $=\frac{1}{\omega}$   $=\frac{1+\omega}{1+\omega}$   $=\omega$ 





ج- إذا كان لدينا ج (-جا (قطع)س، -جتا (قطع)س)= ج (جا (قطع)س، جنا (قطع)س)

عندئذ سنفرض إما ظا(قطع)س= ت أو ظنا(قطع)س= ت وبعد ذلك يمرد التكامل إلى تكامل كسري في غلب الأمر.

أمثلة:

الحل:

الآن من أجل ۱ – نلاحظ أن التكامل ص=  $\int \frac{A^{1}(\bar{a}da)_{0}}{\pi i(\bar{a}da)_{0}}$ . دس عقق  $\int (-++)(\bar{a}da)_{0}$ . - به القطم) س، جنا(قطم) س، جنا(قطم) س) عقق  $\int (-++)(\bar{a}da)_{0}$  بالتالي فإننا موف نفرض أن ظا(قطم) س=  $\int (-++)^{1}(\bar{a}da)_{0}$  الآن بالتمويض في التكامل نجد أن:

ص= إجنا  $\frac{1}{2}$  قطع)س. جنا  $\frac{1}{2}$  قطع)س, دن=  $\frac{1}{2}$  قطع)س). جنا  $\frac{1}{2}$  قطع)س, دس  $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{2}$  دن=  $\frac{1}{2}$ 

الآن من ٢- نجد أن التكامل ص=إظا (قطع)س.دس يحقق الخاصية

 $(-4(\bar{b}_3)_{0}) - 7(\bar{b}_3)_{0} - 7(\bar{b}_$ 



 $\frac{c}{a}$ عندئذ سوف نفرض ت= ظا(قطع)س = c

ونعوض ما حصلنا عليه في التكامل نجد أن:

من أجل ٣- نجد أن التكامل  $= \int \frac{= l(\frac{1}{2} d a_j) u \cdot d l(\frac{1}{2} d a_j) u}{l + a_j! (\frac{1}{2} d a_j) u} . دس محقق أن:$ 

ح (-جا(قطع)س، -جتا(قطع)س)= ح (جا(قطع)س، جتا(قطع)س)

للذلك سوف نفرض أن ظـا(قطـع)س= ت  $= v - u = \frac{v^2}{1-v}$  ويملاحظـة أن جا  $v = u - u = \frac{v^2}{1-v}$  جا v = u - u = v - u

وبكتابة التكامل بالشكل

$$-1 \frac{(1-u)^2 (2 - u)^2 ($$

وبتعویض ما حصلنا علیه في التکامل نجد أن: ص=  $\int \frac{\dot{}^{-}(\dot{}^{-})^{-})}{(\dot{}^{-}(\dot{}^{-})^{+}+\dot{}^{-})^{-}}$ 

من أجل ٤- نجد أن التكامل ص= المراق عققاً للعلاقة المالة





ح (-جا(قطع)س، -جتا(قطع)س)= ﴿ (جا(قطع)س، جتا(قطع)س)

لذلك سوف نفرض أن ظا(قطع)س=  $r \Rightarrow c w = \frac{c r}{r}$ 

وبملاحظة أن جا ﴿ قطع)س=تعبد أن:

 $-2 = \frac{1}{1-\frac{\tau}{1-\tau}} - \frac{\frac{\tau}{1-\tau}}{\frac{\tau}{1-\tau}} = \frac{1}{1-\frac{\tau}{1-\tau}} = \frac{1}{1-\frac{\tau}{$ 

ملاحظة هامة: إذا لم يحقق التكامل القطعي إحدى حالات التحويل الخاص فإننا سوف نستخدم مباشرة التحويلات العامة القطعية أو تحويل يخص التكامل نفسه وفرض التبديل كما قلنا سابقاً يلزم ك بعد التوفيق من الله تعالى خبرة وممارسة.

حالة خاصة ومهمة في التكاملات ص= إجا ( تطع)س. جنا ( قطع)س.دس في الواقع من أجل هـذه التكاملات سنفرض أن جنا(قطع)س= ت = ت حت دت= جا (قطع)س. دس وبالتالي يصبح شكل التكامل:

ص= إظاناس ت، دت= [ (ت ١-١) الم عنه و تكامل ثنائي حد تفاضلي. يكون موجوداً ضمن حالات ثلاث:

١- ن-١ ∈ ص أي أن ن ∈ ص

۲- ۱+۴ وص

۳- ۱+۲ +ن-۱۱ أي أن ۱+۲ +ندس





وفي غير هذه الحالات لا يمكن حساب هذا التكامل حسب تشيبتشيف.

مثال: احسب التكامل إجتا '/ وقطع)سجا '/ قطع)س.دس

بالحظة أن ن= أ ، م= أعند ثلاحظ أن:

$$\gamma = \frac{\gamma}{\xi} = \frac{1+\rho}{\gamma} - \gamma$$

$$\frac{1}{1} = 1 - \frac{1+\rho}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \notin \Delta$$

وبالتالي فإن حساب هذا التكامل غير ممكن حسب تشيبتشيف.

تبديلات للتوابع القطعية ناتجة من التعريف

في الواقع إذا تذكرنا أن:

مشال: ص= إظنا(قطع)س.دس في الواقع للاحظ أن ص= $\int \frac{A^{-}-A^{-0}}{Y}$ .دس ويإجراء التحويل هـ $^{-}$  =  $^{-}$   $^{-}$   $^{-}$ 





وبتعويضه في التكامل:

والآن وكما ناقشنا في التكاملات المثلثية حالـة وجـود أمثـال مختلفـة لــ س داخــل التـابع سـنناقش الآن حالـة وجـود أمثــال مختلفــة لـــ س في التكامــل [ح(جا قطع)س، جنا قطع)س).دس

وفي هذه الحالة سوف نناقش هذه الحالة وفق خطوات كالتالى:

 ١ - ولأ سنسعى إلى توحيد هذا الأمثال باستخدام قوانين الجداء المذكورة في الصفحة.

٧- نحاول إيجاد التكامل وفق ما تعلمنا.

مثال:

ر می المار قطع) ۲س. جتا (قطع) ۱ می س. دس 
$$- \Upsilon$$

$$3-\omega_{1}=\int\frac{1+cl(\delta da_{3})^{\frac{1}{N}}}{cl(\delta da_{3})\omega}.c\omega$$

#### الحل:

١- سنضع نصب أعيننا العلاقة:





جا ( قطع)٨س.جا ( قطع)٧س= [ جتا ( قطع)س- جتا ( قطع)٥١س] وبالتالي:

$$-+\left[\frac{-1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{0} - \frac{-1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{0} - \frac{-1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{0} - \frac{-1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{0} - \frac{-1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{0}$$
 صر

٢- يمكن أن يكتب بالشكل:

$$\omega_{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$$
 [  $\frac{1}{\gamma}$  [  $\frac{1}{\gamma}$  [  $\frac{1}{\gamma}$  ]  $\frac{1}{\gamma}$  ]  $\frac{1}{\gamma}$   $\frac{1}{\gamma}$  ]  $\frac{1}{\gamma}$   $\frac{1}{\gamma}$ 

٣- يكن كتابته بالشكل:

$$-\infty_{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \int_{\gamma}^{\gamma} \int_{\gamma}^{$$

 $\frac{\omega}{2}$  وبملاحظة أن جا $\left(\frac{1}{2}$  قطع) $\left(\frac{1}{2}\right)$  وبملاحظة أن جا $\left(\frac{1}{2}\right)$  قطع) $\left(\frac{1}{2}\right)$ 

$$\omega_{1} = \int \frac{1+e^{i\left(\frac{\delta}{\delta}dx\right)}}{\frac{\gamma}{\gamma}} e^{\frac{\delta}{\delta}dx} \int_{\gamma}^{\omega} \frac{1}{e^{i\left(\frac{\delta}{\delta}dx\right)}} e^{\frac{\delta}{\delta}dx}$$

-سنفرض الآن أن - $\frac{w}{v}$   $\longrightarrow$  دس = + دت

دت 
$$+1$$
 می =  $\int \frac{1+|\hat{a}|}{\gamma+|\hat{a}|} \frac{|\hat{a}|}{|\hat{a}|} \frac{1}{|\hat{a}|} \frac{1}{|\hat{a}|}$ 

وهو تكامل قطعي يحقق الخاصية.

ズ (جا(قطع)س، -جتا(قطع)س)= - ܡ (جا(قطع)س، جتا(قطع)س)

ونناقشه كما ورد معنا سابقاً.





#### تمارين على التكاملات القطعية:

اكتب التحويلات المناسب لكلاً من التكاملات القطعية التالية وإلى ماذا ستؤول مع التعليل؟

 $-1 = 0.0 = \frac{1}{1 + \pi i (\frac{1}{16} + \frac{1}{2})}$  نلاحظ أنه لا يحقق أياً من حالات التحويل الخاص وبالتالي سيكون من الأيسر إجراء التحويل القطعي العام له وبذلك سيرد إلى تكامل كسري.

 $Y - \omega_v = \int_{-1}^{\infty} \frac{e\omega}{\sinh(\omega + \pi i)} \frac{e\omega}{\sinh(\omega + \pi i)} \int_{-1}^{\infty} \frac{e\omega}{\sinh(\omega + \pi i)} \frac{e\omega}{\sinh(\omega + \pi$ 

- 0 - - 0 - - 1 - - 0 التكامل تنطب ق عليه حاله - 0 - - 1 التكامل تنطب ق عليه حاله - 1 م - 1 ( - 1 )

$$rac{1}{\gamma} = \frac{1+\rho}{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma}$$

$$0 = 1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y} = 1 - 0 + \frac{1+p}{y} - y$$

وهي حالة تشيبتشيف الثالثة وسنفرض تحويلاً من الشكل جــا(قطـع)س=





وسيقلب التكامل إلى  $oo_{\tau} = \int_{\frac{\tau}{\tau}}^{\frac{\tau}{\tau}} e^{\omega} e^{\tau} 2 Ja L$  التفاضلي.

 $3- \omega_1 = \int A dx \, dx$ .  $A^{T/Y} \left( dx - 2 \right) \, dx$ 

نلاحظ أن هذا التكامل يحقق ح (-جا (قطع)س، جتا (قطع)س)= -ح (جا (قطع)س، جتا (قطع)س) وبالتالي سيكون التحويل جتا (قطع)س= ت مناسباً.

٢- ص = إجا ( قطع)س. جنا ( قطع)س.دس

على هذا التكامل إذا لاحظنا أن:

جا (قطع)س. جنا (قطع)س=جبا (قطع)س عندها سيصبح تكاملاً بسيطاً أو بملاحظة أن ح (-جبا (قطع)س، -جتبا (قطع)س)=ح (جبا (قطع)س، جنا (قطع)س)

وافتراض ظا(قطع)س= ت ويصبح التكامل كسرياً.

أو افتراض جا (قطع)س= ت ويصبح تكاملاً صحيحاً.

سنتعرض أخيراً إلى تكاملات قطعية من الشكل:

ع= إرن (س). جا ( قطع) إس. دس ، ص= إرن (س). جتا ( قطع) إس. دس





الآن بالنسبة لـ ص يبرهن على أن:

ص= أرن (س). جنا ( قطع) إس. دس=ك (س). جنا ( قطع) إس+ك رس). جا ( قطع) إس حيث كن (س) حدودية من اللرجة (ن) بأمثال غير معينة.

و كناء (س) حدودية أخرى من الدرجة (ن-١) ويأمثال غير معينة.

ولتعيين هذه الأمثال سوف نشتق الطرفين ونجرى مطابقة.

مثال: ص= (س+۱) جا (قطع)٢س.دس

سنكتب أولاً أن:

 $\omega = \int (\omega + 1) .$   $= (3\omega + 1) .$ 

(س+۱) . جا(قطع)٢س= (٢ أس+٢ب) . جا(قطع)٢س + (أ+٢ج) . جتا(قطع)٢س.

والمطابقة نحد أن:

 $\frac{1}{2}$   $\Rightarrow$   $\frac{1}{2}$   $\Rightarrow$   $\frac{1}{2}$   $\Rightarrow$   $\frac{1}{2}$ 

وبالتالي:

 $\int (\omega + 1) . + i \left( \frac{1}{2} d\omega \right) Y \omega . c \cdot \omega = \frac{1}{Y} (\omega + 1) .$   $= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} d\omega \right) Y \omega . c \cdot \omega = \frac{1}{Y} \left( \frac{1}{2} d\omega \right) Y \omega + \varphi .$ 

أما بالنسبة للتكامل ع فيبرهن على أن:

إلى (س). جتا( قطع) إس.دس=ك (س).جا( قطع) إس+ك (س). جتا( قطع) إس
وبالتالي إذا أجرينا اشتقاقاً للطرفين ومن شم مطابقة نحصل على أمشال
ك (س)، ك رس)، ك (س) وبذلك ننهى حساب التكامل.





مثال: ص= ((س + ٢). جنا ( قطع)س.دس

نلاحظ أن:

(س '+ ). جنا (قطع) سدس= (اس ' +بس+ج) جا (قطع) س+ (دس+و) جنا (قطع) س الأن باشتقاق الطرفين ومن ثم الإصلاح نجد أن:

+ 
$$(11^{4} + 1)$$
.  $+ (10^{4} + 1)$   $+ (10^{4} + 1)$   $+ (10^{4} + 1)$   $+ (10^{4} + 1)$   $+ (10^{4} + 1)$   $+ (10^{4} + 1)$ 

وبالمطابقة نحصل على:

$$(= 1 )$$
  $(= 1)$   $(= 1)$   $(= 1)$   $(= 1)$   $(= 1)$ 

 $[(w^7+1), \mp 1]$  قطع)س. د $w=(w^7+\frac{7}{7})$  جا $((w^3+\frac{1}{7}), +((w^3+\frac{1}{7})))$ . جتا $((w^7+1), +((w^7+1)))$  كو ن بذلك قد أجرينا التكامل.

#### التكاملات الأسية:

نسمى التكامل تكاملاً أسياً إذا كان من الشكل [ق(ه").دس

إن هذه التكاملات ترد إلى تكاملات كسرية أو صحيحة أو تكماملاً لثناثي الحد التفاضلي إذا أجرينا تغييراً للتحول من الشكل هـس= ت عدس= دت من المدال

مثال: احسب كلاً من التكاملات الأسية التالية:

$$(-\infty)_{i} = \int_{\frac{A^{-1}}{A}} c_{i} \omega = \int_{\frac{A^{$$



$$\beta - \omega_{1} = \int \frac{(+A^{-\nu/1})^{2}}{A^{\nu-1}} \cdot C \omega$$

$$\beta - \omega_{2} = \int \frac{(+A^{-\nu/1})^{2}}{A^{\nu-1}} \cdot C \omega$$

$$\delta - \omega_{2} = \int \frac{(-A^{-\nu/1})^{2}}{A^{\nu-1}} \cdot C \omega$$

$$\delta - \omega_{2} = \int \frac{(-A^{-\nu/1})^{2}}{A^{\nu-1}} \cdot C \omega$$

: 141

ا- سنفرض هـ $^{0}$ = ت  $\Rightarrow$ د $^{-\frac{c^{2}}{2}}$ ليصبح التكامل

$$\omega_{i} = \int \frac{\ddot{\omega}^{T}}{1+\ddot{\omega}} \left(\frac{c\ddot{\omega}}{2}\right) = \int \frac{\dot{\omega}_{i}c\ddot{\omega}}{1+\dot{\omega}}$$

والتكامل الأخير يحل بسهولة بالشكل:

$$\frac{c}{1+c} \frac{1}{1+c} \cdot c = \int_{c} c - \frac{1}{1$$

٢- سنلاحظ هنا أن التبديل هـ ص= ت سيكون أنسب من هـ ص= ت

وعندها يصبح هـ "=ت والتكامل يتحول إلى:

$$\Delta v_{\gamma} = \int \frac{\dot{v}}{1 + \dot{v}^{\gamma}} \cdot \frac{-\dot{v}^{2}}{\dot{v}} - \int \frac{\dot{v}^{2}}{1 + \dot{v}^{\gamma}} = - \delta_{0} v \, d \dot{v}^{2} + \dot{v}^{2}$$

 $-\infty$  الأمر الذي يجعل التكامل بالشكل:  $-\infty$  سنفرض هـ  $-\infty$   $\to$  دس  $-\infty$  الأمر الذي يجعل التكامل بالشكل:

$$+\frac{\sqrt{r}}{r} + +\frac{\sqrt{r}}{r} + +\frac{\sqrt{r}}{r} + \frac{\sqrt{r}}{r} +$$

-8 سنفرض من أجل هذا التكامل أن هـ-1 = 0  $\Rightarrow 0$  = 0.





٥- سنفرض أن ت= هـ
$$^{n}$$
- ١  $\Rightarrow ^{n}$  وبالتالي:

$$+ + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = + + \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot - + + \frac{1}{2} \cdot - + + \frac{1}{2}$$

$$-1$$
 - سنفرض هنا أن هـ س=  $-1$   $-1$  د $-1$  مـ التكامـ ل  $-1$  مـ  $-1$  د $-1$  د $-1$  د $-1$  د $-1$  د

تكاملات صماء خاصة وتوظيف التبديلات المثلثية والقطعية:

لدينا ثلاثة أشكال هامة في هذه الحالة:

سنفرض من أجل هذا الشكل بتـديلين للمتحــول أحــدهـما مثلثــي والأخــر قطعــر.

أ- التبديل المثلثي: سنفرض أن س= إجتات أو س= إجات

عندها سيصبح من أجل س= اجتات = دس= - اجات دت

ويصبح الجذر بالشكل الإ الم جنات = إ. جات

ويصبح بالتالي ص تكاملاً مثلثياً.

ب- التبديل القطعى: سنفرض أن س= ١. ظاس





لأنسه عنسدها دس= المستعرب المستكل المستحل المستدر بالسشكل

١٥ - ١٥ ظا ١٠ قطع)ت = ١١ -ظا ١٠ قطع)ت = ١٠ مظا ١٠ قطع)س

ويرد بذلك التكامل إلى تكامل قطعي.

٧- الشكل الثاني ص= إق (١١٠ + س١).دس

أ- التبديل المثلثي: س= ﴿ظات عدس= حِتا التبديل المثلثي: سـ

ويصبح شكل الجذر:

ويصبح التكامل ص تكاملاً مثلثياً ومثله س= {ظات

ب- التبـــديل القطعــــي: س= قـــوس جتــــا(قطــع) ت ـــــــه دس= أ.

جا(قطع)ت. دت

ويصبح شكل الجذر الم ٢٠٠٠ = ١١ الم ١٠٠٠ جتا ١ (قطع)ت= ١٩جا (قطع)ت

ويصبح ص تكاملاً قطعياً.

-7 الشكل الثالث:  $= [5(\sqrt{1-1}). -1]$ .دس

أ- التبديل المثلثي:

س=<u>-إظات</u> دت جنات دت

ويصبح شكل الجلد الس ما عام المسائد المسائد والتكامل ك

يصبح تكاملاً مثلثياً.



ب- التبديل القطعى:

س= ﴿جنا(قطع)ت => دس= ﴿جا(قطع)ت ويصبح شكل الجذر السّ - ﴿ \* الله حَنا ۚ (قطع)ت - ﴿ = ﴿جا(قطع)ت وبالتالي يصبح ك تكاملاً قطعياً.

٧- ص = [ ١٠ + س ، س.دس

مثال: ١- ص = الما-س دس

الحل:

١ - من أجل ص، سنفرض أن س= ٢ جنات => ٢٠ جات. دت وبالتالي:

ص = الأ-؛ جا الله عن دت= المات دت= المات دت

$$+ \left[\frac{\omega \gamma t_{+}}{\gamma} - \omega_{-}\right] \cdot \gamma - = \omega_{-} \cdot \frac{\omega \gamma t_{-}}{\gamma} \cdot \frac{-1}{\gamma} \cdot \frac{1}{\zeta} \cdot \xi - =$$

دت.  $\frac{Y}{e^{-1}}$ دت. فرض w=Y. ظا(قطع) م $e^{-1}$  دت. وبطريقة أخرى يمكن فرض w=Y

ويصبح بالتالي:

هو تکامل قطعی ینطبق علیه حالة ح(جـا(قطـع)ت، –جتــا(قطـع)ت)= – ح(جا(قطم)ت، جتا(قطم)ت)

وبالتالي سنفرض أن جا(قطع)ت=  $\tau \Longrightarrow \tau = \pi$ دت جتا(قطع)ت. دت





$$-1 = \frac{\tau^3}{(\tau + 1)^7}$$
 والأخير تكامل كسري.

۲ - مــن أجـــل ص- = أ الم+س مستفرض أن س= ظـــات دس= دت: دسان

سنفرض هناك جتات= ٢ = حدد - جات. دت

$$-\frac{\tau}{1} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

وبطريقة أخرى سنفرض أن:

ص = إجا( قطع)ت. جا ( قطع)ت. جا ( قطع)ت.دت

$$-7$$
 من أجل التكامل  $-7$  من أجل التكامل م

$$= \int \frac{-x^{2}}{1+Y^{2}} \frac{dl}{dl} = \int \frac{1}{1+Y^{2}} \frac{dl}$$





وبطريقة أخرى سنفرض أن س= جنا (قطع)ت = دس= جا (قطع)ت. دت

عندئذ يصبح لدينا ص، = إجاز قطع)ت.دت = إدت = ت + ج

أخيراً سنورد التعميم التالي:

يمكن في الواقع رد أي تكامل من الشكل أن السروب الكري وذلك

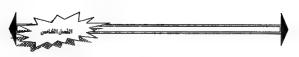
ياكمال المربع داخل الجلر بالشكل  $w^* + vw + \frac{v^*}{2} + v - \frac{v^*}{2}$ 

$$\left(\frac{\sqrt{\zeta}}{\xi} - J\right) + \sqrt{\left(\frac{\zeta}{\zeta} + U^{\alpha}\right)} =$$

سيرد عندها هذا التكامل إلى أحد الشكلين:

إِمَا إِنَ (١٠٠٧- ١١) دت أو إن (١٠٠١- ١٩) دت





# تمارين عامة التكامل غير المحدد

# السؤال الأول:

أوجد التابع الأصلي لكلاً من التوابع التالية:

$$(-1) = \frac{\tilde{\delta}_{\ell} - \tilde{\delta}_{\ell}}{\tilde{\delta}_{\ell} - \tilde{\delta}_{\ell}} = \tilde{\delta}_{\ell} = \tilde{\delta}_{\ell} + \tilde{\delta}_{\ell} =$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1}$$

السؤال الثاني: أوجد التكاملات الكسرية:

$$\frac{1-r}{2} \frac{1-r}{2} \frac{1-$$

السؤال الثالث: أوجد كلاً من التوابع الصماء التالية:

$$-1 = \frac{1/1(0+\omega Y) + \frac{1}{1+\omega Y}}{(\omega + \omega Y)} - 1$$

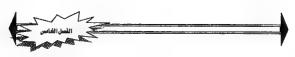
السؤال الرابع:

عين كلاً من تكاملات ثنائي الحد التفاضلي التكاملات القابلة للمكاملة ثـم أوجد تابعها الأصلى؟

$$- \sum_{i=1}^{T/n} (-\omega^{i})^{n/T} \omega_{i} = 0$$

السؤال الخامس: عين فيما يلي إذا كانت التكاملات المثلثية قابلة للمكاملة وأوجد تابعها الأصلي؟





#### السؤال السادس: أوجد التكاملات المثلثية التالية:

$$\begin{aligned} & -1 = \frac{cw}{chv} + \frac{cw}{chv} \\ & -1 = \frac{cw}{chv} + \frac{cw}{chv} \\ & -1 = \frac{cw}{chv} - \frac{cw}{chv} \\ & -1 = \frac{chv}{chv} - \frac{chv}{chv} - \frac{chv}{chv} \\ & -1 = \frac{chv}{chv} - \frac{chv}{chv} - \frac{chv}{chv} \\ & -1 = \frac{chv}{chv} - \frac{chv}{chv} - \frac{chv}{chv} - \frac{chv}{chv} - \frac{chv}{chv} \\ & -1 = \frac{chv}{chv} - \frac{c$$

# السؤال السابع: أوجد التكاملات القطعية التالية:

$$\frac{c_{0}}{a_{1}} \frac{c_{0}}{(a_{1})^{n}(a_{2})} - \gamma \qquad \frac{c_{0}}{1+\omega(a_{1})^{n}(a_{2})} - \gamma \\ - \gamma \frac{c_{0}(a_{1})^{n}(a_{2})}{c_{0}} \frac{c_{0}}{(a_{1})^{n}(a_{2})} - \gamma \\ - \gamma \frac{c_{0}(a_{1})^{n}(a_{2})}{c_{0}} \frac{c_{0}}{(a_{1})^{n}(a_{2})} \frac{c_{0}}{(a_{1})^{n}(a_{2})} \frac{c_{0}}{(a_{2})^{n}(a_{2})} \frac{c_{0}}{c_{0}} \\ - \gamma \frac{c_{0}(a_{1})^{n}(a_{2})}{c_{0}} \frac{c_{0}}{(a_{1})^{n}(a_{2})} \frac{c_{0}}{c_{0}} \frac{c_{0}}{(a_{1})^{n}(a_{2})} \frac{c_{0}}{(a_{1})^{n}(a_{2})} \frac{c_{0}}{c_{0}} \frac{c_{0}}{(a_{1})^{n}(a_{2})} \frac{c_{0}}{(a_{1})^{n}(a_{2})} \frac{c_{0}}{(a_{1})^{n}(a_{2})} \frac{c_{0}}{(a_{1})^{n}(a_{1})^{n}(a_{2})} \frac{c_{0}}{(a_{1})^{n}(a_{1})^{n}(a_{2})} \frac{c_{0}}{(a_{1})^{n}(a_{1})^{n}(a_{2})} \frac{c_{0}}{(a_{1})^{n}(a_{1})^{n}(a_{2})} \frac{c_{0}}{(a_{1})^{n}(a_{1})^{n}(a_{2})} \frac{c_{0}}{(a_{1})^{n}(a_{1})^{n}(a_{2})} \frac{c_{0}}{(a_{1})^{n}(a_{1})^{n}(a_{1})} \frac{c_{0}}{(a_{1}$$





 $V = \int \frac{\pi i (\bar{a} d a) \omega - \pi i (\bar{a} d a) \omega}{\pi i (\bar{a} d a) \omega} c \omega$ 

۸ - آ جا (قطع)س جا (قطع)س دس
 جا (قطع)س جا (قطع)س

9 - إجتا<sup>ه</sup> ( قطع)س. دس

۰۱ - ا جا قطع)س م.س.دس جار قطع)س ۱-۱ م.س.دس

#### السؤال الثامن:

أوجد عن طريق التبديلات المثلثية أو القطعية المناسبة في التكامل التالي:

Ju 1/m +1cm

# السؤال التاسع: اقترح طريقة لحل التكاملات التالية:

۱- إس. قوسظاس.دس ۲- ((قوسجاس) دمي

۳- (ها توسيش دس

3- Se (m +1).cm

 $0 - \int_{\frac{1}{1+m}}^{\frac{1}{m}} cm$ 

۲- آس۱. قوسجاس دس

۷– آس<sup>۲</sup>,ه<sup>ن</sup>,دس

۸- آ<del>س-۱</del> دس

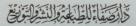
٩ - إقوسظا (ه س) د س

۱۰ [ه<sup>س ب</sup>س دس

# الرياضيات







الملكة الأرنية الهاشمية – عنقسان – شساع لللك حسين مجمع المصيعي التجساري – مناشف به 9922 6 4611169 . يندكس 19229 مقان 1912 الأرن E-mail: safa@darsafa.net www.darsafa.net

